Zur Entwicklung der gymnasialen Reifeprüfung aus Mathematik in der Zeit von 1850 bis 1918

Maria Koth, Universität Wien

Seit dem Jahr 1850 bildet die Reifeprüfung (ursprünglich Maturitätsprüfung genannt) den Abschluss des österreichischen Gymnasiums und ist gleichzeitig Voraussetzung für den Hochschulzugang. Mit Ausnahme der Jahre 1850 und 1919 war Mathematik stets ein für alle KandidatInnen verpflichtendes Maturaprüfungsfach.

In diesem Beitrag wird – ausgehend von der Gymnasialreform des Jahres 1849 – die Entwicklung der gymnasialen Maturitätsprüfung bis zum Ende der Monarchie betrachtet. Im Anschluss daran werden die gymnasialen Mathematiklehrpläne dieser Zeit vorgestellt und die tatsächlichen Anforderungen der schriftlichen Maturitätsprüfung aus Mathematik anhand von Prüfungsaufgaben dokumentiert.

1. Die Gymnasialreform von 1849

Im Jahr 1848 war das österreichische Gymnasium durch die Bestimmungen des "Gymnasialkodex" von 1809 sowie des Lehrplans von 1819 organisiert: Das Gymnasium umfasste sechs Klassen mit je 18 Unterrichtsstunden pro Woche, mehr als die Hälfte der Unterrichtszeit entfiel auf den Lateinunterricht. Wer ein Fachstudium an einer Universität betreiben wollte, musste nach Abschluss des Gymnasiums zunächst einen zweijährigen philosophischen Lehrgang absolvieren. Diese philosophischen Studien bildeten keinen Bestandteil des Gymnasiums, sondern waren entweder selbständig als "Lyceen" eingerichtet oder, wo Universitäten bestanden, diesen angegliedert.

Die strukturelle Reform dieses als veraltet angesehenen Gymnasiums war eine der ersten Maßnahmen des 1848 neu gegründeten österreichischen Ministeriums des öffentlichen Unterrichtes. Bereits im Jahr 1849 wurde der von Franz Exner und Hermann Bonitz verfasste "Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Österreich" erlassen (ME vom 16.9.1849, Z.6467; im Folgenden als Organisationsentwurf bezeichnet), der eine grundlegende Neuordnung des Mittelschulwesens vorsah: Durch Einbeziehung des bisherigen philosophischen Lehrgangs wurde das Gymnasium auf acht Jahre erweitert, und am Ende der achten Klasse wurde eine abschließende Maturitätsprüfung eingerichtet, deren positiver Abschluss Voraussetzung für eine Immatrikulation als ordentlicher Hörer an der Universität wurde.

Das neugestaltete Gymnasium war in ein jeweils vierjähriges Unter- und Obergymnasium gegliedert. Das Untergymnasium sollte als ein in sich abgeschlossenes Ganzes eine grundlegende Allgemeinbildung vermitteln, das Obergymnasium sollte diesen Unterricht in mehr wissenschaftlicher Weise fortsetzen und war als spezielle Vorbereitungsschule der Universität konzipiert. Abbildung 1 zeigt die Erweiterung des Fächerkanons und die Veränderung der Stundenzahlen der einzelnen Fächer gegenüber dem früheren sechsklassigen Gymnasium, Abbildung 2 die detaillierte Stundentafel des neuen Gymnasiallehrplanes: Der prozentuelle Stundenanteil für Latein wurde reduziert, der Griechischunterricht dagegen wesentlich verstärkt. Die Gegenstände Deutsch, Naturgeschichte und Physik sowie Philosophische Propädeutik wurden neu eingeführt, die Stundenzahlen für Geographie und Geschichte sowie für Mathematik fast verdoppelt. Außerdem wurden Freigegenstände wie Kalligraphie, Zeichnen, Gesang, Gymnastik und moderne Fremdsprachen (Französisch, Englisch usw.) neu in das Bildungsangebot aufgenommen.

Sechsklassiges Gymnasium : (Lehrplan von 1819)		**Achtklassiges Gymnasium:** (Lehrplan des OE von 1849)	
Religion	12	Religion	16
Latein	63	Latein	47
Griechisch	8	Griechisch	28
Geographie und Geschichte	13	Deutsch	25
Mathematik	12	Geographie und Geschichte	25
Gesamt:	**108**	Mathematik	22
		Naturgeschichte und Physik	21
		Philosophische Propädeutik	2
		Gesamt:	**185**

Außerdem als Freigegenstände angeboten: Weitere lebende Sprachen, Kalligraphie, Zeichnen, Gesang, Gymnastik

Abb.1 (Unterrichtsgegenstände des Gymnasiums und deren Gesamtstundenzahlen)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Religion	2	2	2	2	2	2	2	2
Lateinische Sprache	8	6	5	6	6	6	5	5
Griechische Sprache	-	-	5	4	4	4	5	6
Deutsche Sprache	4	4	3	3	2	3	3	3
Geographie und Geschichte	3	3	3	3	4	3	3	3
Mathematik	3	3	3	3	4	3	3	-
Naturgeschichte und Physik	2	2	3	3	2	3	3	3
Philosophische Propädeutik	-	-	-	-	-	-	-	2
Summe:	22	20	24	24	24	24	24	24

Abb.2 (Stundentafel des Gymnasiallehrplans des Organisationsentwurfes von 1849)

Da der Wissensstoff durch die Integration neuer Unterrichtsfächer zugenommen hatte und der neue Lehrplan in der Oberstufe eine wissenschaftliche Vertiefung verlangte, sah der Organisationsentwurf die Unterrichtserteilung durch qualifizierte Fachlehrer vor (siehe OE, §91). Eine Kombination des bisherigen Klassenlehrersystems mit dem neuen Fachlehrersystem sah man darin, dass in jeder Klasse einer der unterrichtenden Fachlehrer als sogenannter Klassenlehrer für die Koordination der Unterrichts- und Erziehungsarbeit zuständig sein sollte. Es wurde damit die noch heute übliche Funktion des Klassenvorstandes geschaffen.

Die Maturitätsprüfung war im Organisationsentwurf als abschließende Prüfung über den gesamten Lehrstoff des Obergymnasiums in allen obligaten Fächern konzipiert. Ziel dieser neu eingerichteten "gründlichen Maturitätsprüfung" war es, "den gesamten Bildungsstand der zur Universität abgehenden Jünglinge sicher zu konstatieren" (siehe Anhang XIII des OE). Die Maturitätsprüfung sollte einerseits gewährleisten, dass "der Hauptstamm der ordentlichen Hörer der Universität die erforderliche Vorbildung mitbringe", andrerseits aber auch dem Staat eine Kontrolle über die Arbeit der einzelnen Gymnasien ermöglichen. Der Landesschulinspektor als Vorsitzender der Prüfung sollte überwachen, "ob das Gymnasium an seine Schüler am Schluss des gesamten Cursus wirklich die Forderungen stellt, die als Aufgabe des Gymnasiums durch den allgemeinen Studienplan festgestellt sind." (siehe Anhang XIII des OE).

Bemerkenswert aus heutiger Sicht ist vor allem die rasche Umsetzung dieses großen Schulreformwerks: Bereits 1848 war die Auflassung des philosophischen Lehrgangs eingeleitet worden. In den Schuljahren 1848/49 und 1849/50 wurde zunächst der erste und dann der zweite philosophische Lehrgang mit dem Gymnasium vereinigt (ME vom 28. 8. 1848, Z. 5602. und ME vom 22. 7. 1849, Z.333.), so dass bereits im Sommer 1850 die ersten Maturitätsprüfungen abgehalten werden konnten.

Im Schuljahr 1849/50 gab es im Gebiet der heutigen Republik Österreich insgesamt 20 Gymnasien mit Öffentlichkeitsrecht, von denen 13 als vollständige achtjährige Anstalten (Wien-Akademisches Gymnasium, Wien-Schottengymnasium, Wien-Josefstadt, Wien-Theresianische Akademie, Graz, Innsbruck, Feldkirch, Krems, Melk, Linz, Kremsmünster, Salzburg, Klagenfurt) und sieben als Untergymnasien (Judenburg, Wr. Neustadt, Horn, Seitenstetten, Hall, St. Paul, Oberschützen) geführt wurden (siehe KLEEMANN). Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts sollte sich die Zahl der Gymnasien mehr als verdoppeln und die Schülerzahl von 4651 auf 13880 verdreifachen (siehe SCHERMAIER).

Gleichzeitig mit der Gymnasialreform wurde durch das "Provisorische Gesetz über die Prüfung der Kandidaten des Gymnasiallehramtes vom 30. 8. 1849, Z.5880", dem 1856 ein definitives Gesetz folgte (MV vom 24.7.1856, Z.6124), die künftige Ausbildung der Lehrer dieser Schulen geregelt. Bis 1849 hatte es keinen vorgeschriebenen Bildungsgang für Gymnasiallehrer gegeben. Bewerber um eine Anstellung hatten eine Konkursprüfung abzulegen, die nur für die jeweils ausgeschriebene Stelle Gültigkeit hatte und für jede neue Bewerbung erneuert werden musste. Die neuen Bestimmungen sahen ein verpflichtendes dreijähriges Universitätsstudium aus einer bestimmten Fächerkombination, die Ablegung einer (aus Hausarbeiten, schriftlichen Klausurarbeiten und mündlichen Prüfungen bestehenden) Lehrbefähigungsprüfung und eine praktische Ausbildung in Form eines an einem Gymnasium abzulegenden Probejahres vor. Zur Auswahl standen die Fächerkombinationen a) klassische Philologie, b) Geschichte und Geographie, c) Mathematik und Physik für das gesamte Gymnasium, oder Naturgeschichte für das gesamte Gymnasium in Verbindung mit Mathematik und Physik für das Untergymnasium, d) philosophische Propädeutik in Verbindung mit einem der Fächer Mathematik, Physik oder Naturgeschichte für das Untergymnasium, e) deutsche Sprache in Verbindung mit einer der beiden klassischen Sprachen. Für die Abhaltung der Lehrbefähigungsprüfungen wurden zunächst in Wien und später auch in Graz, Innsbruck, Prag und Lemberg Lehramtsprüfungskommissionen eingerichtet.

Der Mangel an ausreichend qualifizierten Lehrern war das Hauptproblem der ersten Jahre des neuen Gymnasiums. In der Übergangszeit wurden Lehramtskandidaten, die bereits eine längere erfolgreiche Verwendung im Lehrfach nachweisen konnten, ohne Absolvierung des dreijährigen Universitätsstudiums zur Lehrbefähigungsprüfung zugelassen. Trotzdem dauerte es viele Jahre bis eine ausreichende Zahl an geprüften Lehrern zur Verfügung stand. So waren im Gebiet der heutigen Republik Österreich im Schuljahr 1862/63 neben insgesamt 220 geprüften Lehrern (unter Mitrechnung der Direktoren und der Katecheten) auch 52 ungeprüfte Supplenten beschäftigt (siehe BONITZ). Im Schuljahr 1871/72 gab es sogar 95 Supplenten in Relation zu 310 geprüften Lehrern (siehe HOCHEGGER).

2. Die Maturitätsprüfung in der Zeit von 1850 bis 1918

Die Paragraphen 78 bis 88 und der Anhang XIII des Organisationsentwurfes (ME vom 16. Sept. 1849, Z.6467) beinhalten detaillierte Richtlinien zur Durchführung der Maturitätsprüfung. Diese erste österreichische Reifeprüfungsvorschrift sah schriftliche und/oder mündliche Teilprüfungen in allen Pflichtgegenständen der achten Klasse -mit Ausnahme von Religion und Philosophischer Propädeutik- vor, und außerdem eine schriftliche und eine mündliche Prüfung in dem mit Ende der siebenten Klasse abschließenden Gegenstand Mathematik:

Schriftliche Teilprüfungen:	**Mündliche Teilprüfungen:**
Aufsatz aus der Muttersprache (5 Stunden)	Literatur der Muttersprache
Übersetzung aus dem Lateinischen (3 Stunden)	Lateinische Sprache und Literatur
Übersetzung ins Lateinische (2 Stunden)	Griechische Sprache und Literatur
Übersetzung aus dem Griechischen (3 Stunden)	Mathematik
Mathematische Arbeit (4 Stunden)	Naturgeschichte und Physik
	Geographie und Geschichte

Prüfungsstoff sollte jeweils der gesamte Lehrstoff des Obergymnasiums sein. In den Instruktionen zu den Maturitätsprüfungen (Anhang XIII des OE) wurde allerdings betont, dass die Prüfung nicht "die äußersten Spitzen der Gymnasialkenntnisse" zum Inhalt haben sollte, sondern nur "den festen Stamm des Wissens". Es sollte nicht so sehr auf die einzelnen Kenntnisse des Schülers als "auf die ganze sich aus dem Unterricht ergebende Bildung" ankommen. Eine "spezielle gedächtnismäßige Vorbereitung auf die Prüfung" sollte nicht erforderlich sein.

Als Hilfsmittel bei den Prüfungen wurden nur Lexika für die Übersetzung aus dem Griechischen und Logarithmentafeln für die Mathematikprüfungen gestattet. Die Übersetzungen ins bzw. aus dem Lateinischen mussten ohne Hilfe eines Wörterbuches bewältigt werden, und auch die Verwendung von Formelsammlungen bei der Mathematikprüfung war nicht erlaubt.

In den ersten Jahren der Durchführung der neuen Bestimmungen war es notwendig, die im Organsisationsentwurf vorgesehenen Anforderungen deutlich zu reduzieren: So verzichtete man bei der ersten Matura im Jahr 1850 auf die schriftliche und mündliche Prüfung aus Mathematik, und schränkte außerdem den Prüfungsstoff der mündlichen Prüfungen aus Deutsch, Religion, Geographie und Geschichte sowie Physik auf das letzte Semester der achten Klasse ein. Auch die vorgesehene Prüfung aus Naturgeschichte entfiel, andrerseits wurde Religion (auf Druck der katholischen Kirche) entgegen den ursprünglichen Bestimmungen des Organisationsentwurfes in die Reihe der Prüfungsfächer zusätzlich aufgenommen. (MS vom 3. Juni 1850, Z.4638). In den Jahren 1851 und 1852 wurde der Prüfungsstoff der vorhin genannten mündlichen Prüfungen schrittweise erweitert (MS vom 26. Mai 1851, Z.5123 bzw. ME vom 1. Feber 1852, Z.1373), so dass 1853 erstmals -wie im Organisationsentwurf vorgesehen- der gesamte Lehrstoff des Obergymnasiums Prüfungsgegenstand war.

Bereits 1851 war auch erstmals die schriftliche und mündliche Prüfung aus Mathematik abgehalten worden. Allerdings wurde die Einschränkung gemacht, "dass in der Geometrie das Auffinden von Beweisen und das Lösen von Aufgaben, welche im Unterricht noch nicht vorgekommen waren", nicht verlangt werden durften. Ebenso mussten "alle Hauptgebiete der Mathematik, die noch nicht vorgetragen worden waren", von der Prüfung ausgeschlossen werden. (MS vom 26. Mai 1851, Z.5123)

Obwohl die neu eingeführte Maturitätsprüfung von verschiedenen Seiten heftig kritisiert wurde -Hauptkritikpunkt war eine befürchtete Überlastung der Schüler-, hielt man prinzipiell an der Idee einer den gesamten Lehrstoff des Obergymnasiums umfassenden abschließenden Prüfung fest. Nach einer fünfjährigen Erprobungszeit erhielten die Bestimmungen des Organisationsentwurfes im Dezember 1854 die definitive kaiserliche Sanktion (MV vom 9.12.1854, Z. 1432.). Die 1850 zusätzlich eingeführte Prüfung aus Religion wurde beibehalten, eine weitere Prüfung aus Philosophischer Propädeutik für die Zukunft in Aussicht genommen (jedoch nie realisiert).

Aus heutiger Sicht erscheint es völlig undenkbar, den Mathematikunterricht -wie im Organsisationsentwurf vorgesehen- mit der dritten Obergymnasiumklasse zu beenden, um dann ein Jahr später eine schriftliche und mündliche Prüfung über den gesamten Oberstufenstoff zu verlangen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass man 1855 -auf Grund der Erfahrungen der ersten Jahre- eine Mathematikstunde in der vierten Obergymnasiumklasse neu einführte, die ausschließlich der zusammenfassenden Wiederholung des Lehrstoffs der früheren Klassen dienen sollte (MV vom 10.Sept. 1855, Z.10312). Im Jahr 1870 wurde der Mathematikunterricht der 8. Klasse durch eine zweite der Wiederholung gewidmete Stunde erweitert (ME vom 21.12.1870, Z.11788).

Hinsichtlich des Gegenstandes Naturgeschichte, wo ebenfalls im Lehrplan des Organisationsentwurfes kein Unterricht in der Abschlussklasse vorgesehen war, entschied man im ME vom 10. Sept. 1855, Z.10312, die mündliche Maturitätsprüfung ab 1856 entfallen zu lassen und die letzte Semestralnote dieses Faches ins Maturitätszeugnis aufzunehmen. Außerdem wurde dem Maturavorsitzenden gestattet, die mündliche Prüfung aus Deutsch für alle oder einzelne Kandidaten ausfallen zu lassen (MV vom 30. März 1856, Z. 4921). Weitere Erleichterungen für die Prüflinge brachten der Erlass vom 18. Juni 1878, Z.9645, in dem die 1850 eingeführte Religionsprüfung abgeschafft wurde, und der Erlass vom 22. Jänner 1879, Z.803, in dem Schüler von den mündlichen Prüfungen aus Physik und aus Geographie und Geschichte dispensiert wurden, sofern sie in diesen Gegenständen in den letzten vier Semestralzeugnissen mit "ausgezeichnet", "vorzüglich" oder "lobenswert" beurteilt waren. In diesem Fall wurde die Durchschnittsnote dieser vier Semestralzeugnisse ins Maturitätszeugnis aufgenommen. (Maßgeblich war die 1866 eingeführte siebenstufige Beurteilungsskala "ausgezeichnet", "vorzüglich", "lobenswert", "befriedigend", "genügend", "nicht genügend" und "ganz ungenügend".) Die hohe Forderung einer die Gesamtbildung der Oberstufe umfassenden Prüfung wurde somit durch Dispensierungen von mündlichen Teilprüfungen in immer stärkerem Maße relativiert.

Die Maturitätsprüfung stand nicht nur zur Zeit ihrer Einführung, sondern während der gesamten zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts im Kreuzfeuer der Kritik. Der Hauptvorwurf betraf die durch die Maturitätsprüfung verursachte Überanstrengung der Schüler. Die im Organsisationsentwurf vertretene Forderung, die Prüfung so zu gestalten, dass keine spezielle gedächtnismäßige Vorbereitung erforderlich wäre, erwies sich in der Praxis als nicht realisierbar. Mit den in den Jahren 1855 bis 1879 nach und nach eingeführten Prüfungsdispensen versuchte man, einer Überlastung der Prüfungskandidaten entgegenzuwirken.

Die Maturitätsprüfungsvorschrift des Organisationsentwurfes war in modifizierten Form bis 1908 in Kraft. In den 1885, 1895 und 1900 herausgegebenen "Weisungen zur Führung des Schulamtes an den Gymnasien in Österreich" (MV vom 28.4.1885, Z. 7553., ME vom 5.5.1895, Z. 9826., ME vom 23.2.1900, Z.5146.) wurden der Anhang XIII des Organisationsentwurfes fast wortident und die Paragraphen 78 bis 88 mit Berücksichtigung der seit 1849 eingeführten Prüfungsdispensen abgedruckt. Änderungen gegenüber 1849 gab es im Wesentlichen nur im Hinblick auf die Prüfungstermine und die Reprobationsbestimmungen.

Erst 1908 kam es zu essentiellen Veränderungen hinsichtlich der Gestaltung der Matura. Bei der im Jänner 1908 in Wien abgehaltenen Mittelschulenquete wurde die Frage der Maturitätsprüfung heftig diskutiert (siehe HÖLDER). Als Kompromiss der dort vertretenen Meinungen - neben einer großen Zahl an auf Prüfungserleichterungen abzielenden Reformvorschlägen wurde massiv auch die Forderung nach einer völligen Abschaffung der Matura eingebracht- entstand die Reifeprüfungsvorschrift von 1908 (MV vom

29. 2. 1908, Z.10051.). Die Maturitätsprüfung wurde in Reifeprüfung umbenannt und sollte fortan nur mehr drei schriftliche und vier mündliche Teilprüfungen umfassen:

Schriftliche Teilprüfungen:
Aufsatz aus der Muttersprache mit freier Wahl aus drei verschiedenen Themen (5 Std.)
Übersetzung aus dem Lateinischen (3 Std.)
Übersetzung aus dem Griechischen (3 Std.)
Mündliche Teilprüfungen:
Muttersprache
Latein oder Griechisch
Mathematik
Geographie und Geschichte

Die Verwendung eines Wörterbuches als Hilfsmittel wurde nicht nur für die Übersetzung aus dem Griechischen, sondern erstmals auch für die Lateinprüfung gestattet. Weiterhin hatten die Lehrer aller Pflichtgegenstände der obersten Klasse als Mitglieder der Prüfungskommission Stimmrecht über die Zuerkennung der Reife. Im Unterschied zu den bisherigen Maturitätszeugnissen enthielt das neue Reifezeugnis keine Teilbeurteilungen der einzelnen Gegenstände mehr, sondern nur das Gesamtkalkül "reif mit Stimmenmehrheit", "reif mit Stimmeneinhelligkeit" bzw. "reif mit Auszeichnung". Auch auf die Aufnahme der Sittennote (= Betragensnote) ins Maturazeugnis wurde erstmals verzichtet.

Die Maturareform von 1908 kann als Paradigmenwechsel hinsichtlich der Prüfungsanforderungen angesehen werden: Erstmals verabschiedete man sich von der im Organisationsentwurf vertretenen Idealvorstellung einer die Gesamtbildung des Obergymnasiums umfassenden abschließenden Prüfung und beschränkte die Reifeprüfung bewusst auf sieben exemplarisch ausgewählte Teilprüfungen. Insbesondere das Wegfallen der schriftlichen Prüfung aus Mathematik und der Übersetzung ins Lateinische brachten eine wesentliche Erleichterung für die Prüflinge. Außerdem durfte die Reifeprüfung ab 1908 im Fall des Nichtzuerkennens der Reife nicht wie vorher nur einmal, sondern zweimal wiederholt werden, und positiv beurteilte Teilprüfungen mussten ab nun bei einer Prüfungswiederholung nicht mehr neu abgelegt werden. In einem 1910 durch die internationale mathematische Unterrichtskommission veranlassten Bericht über den Mathematikunterricht an den österreichischen Gymnasien wurde die Maturareform von 1908 durch den folgenden Satz charakterisiert: "War bis vor wenigen Jahren noch die Reifeprüfung der Schrecken vieler, so wurde ihr durch die Neuregelung des Jahres 1908 jegliche Härte genommen." (siehe DINTZL)

Die Bestimmungen der Reifeprüfungsvorschrift von 1908 blieben bis einschließlich 1919 in Kraft, wobei man im Jahr 1919 (auf Grund der schwierigen Situation zu Ende des ersten Weltkriegs) die Reifeprüfung auf die drei schriftlichen Klausurarbeiten beschränkte. Eine mündliche Prüfung hatte ein Abiturient dieses Jahres nur in jenen Gegenständen abzulegen, in denen seine Klausurarbeit negativ beurteilt worden war (E. vom 3.5. 1919, Z.8897). Damit war -aus heutiger Sicht- 1919 neben 1850 das einzige Jahr in der 150-jährigen Tradition der österreichischen Matura, in dem Mathematik nicht als verpflichtendes Prüfungsfach vorgesehen war.

3. Die Entwicklung der Mathematiklehrpläne und der Bestimmungen zur Maturitätsprüfung aus Mathematik

Im sechsklassigen Gymnasium des österreichischen Vormärz war Mathematik nur ein Nebenfach. Der Lehrplan von 1819 sah zwar in jeder Klasse zwei Mathematikstunden pro Woche vor, aber die damals übliche Unterrichtserteilung durch Klassenlehrer (meist Lateinlehrer ohne ausreichende Mathematikkenntnisse) und auch das Fehlen geeigneter Schulbücher hatten zur Folge, dass nur bescheidenste Mathematikkenntnisse vermittelt wurden. Ein Unterricht in Geometrie (und auch in Physik) war überhaupt erst im ersten philosophischen Lehrgang vorgesehen. "Dass das ehemalige Gymnasialsystem für die Mathematik weniger als Nichts getan hat, indem absolvierte Humanitätsschüler selbst in den einfachsten Rechnungsoperationen sich nicht zurecht fanden, ist eine im Lehrerleben ebenso allbekannte Tatsache, als dass in den philosophischen Studien nur ein kleiner Teil der Schüler, beim Zurückbleiben der übrigen, sich zu tüchtigen Leistungen in diesem gefürchteten Gegenstande emporarbeiten konnte" - so wird der Mathematikunterricht der Zeit vor 1849 in einem 1852 vom Ministerium für Cultus und Unterricht erstellten Bericht zur Gymnasialreform beschrieben (siehe KLEEMANN).

Durch die Bestimmungen des Organisationsentwurfes von 1849 wurde der Mathematikunterricht auf eine völlig neue Grundlage gestellt. Erstmals wurden Mathematiklehrpläne (OE, §41 - 44) erlassen, in denen sowohl allgemeine Ziele als auch Lehrstoffe für die einzelnen Klassen festgelegt wurden. Ziel des Unterstufenunterrichtes war (OE, §41) "Sicherheit im Zahlenrechnen, Durchübung der praktisch wichtigen Rechnungsarten, und in beiden zugleich Vorbereitung auf wissenschaftliche Behandlung der Arithmetik. Kenntnis der geometrischen Gestaltungen, ihrer Beziehungen und Gesetze, nicht auf strengen Beweis, sondern auf methodisch geleitete Anschauung basiert, als Vorbereitung zur wissenschaftlich beweisenden Geometrie, und als Ersatz derselben für diejenigen, welche sogleich zu einem praktischen Berufe übergehen." Die wichtigsten Themen im vierklassigen Untergymnasium waren: das Rechnen mit natürlichen Zahlen und Bruchzahlen (in Dezimal- und Bruchschreibweise) sowie Proportionen mit vielfältigen Anwendungen; elementare Algebra, insbesondere das Rechnen mit "Buchstabengrößen" und die Lehre von den Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten; Potenzieren und Wurzelziehen; Konstruieren von Dreiecken, Vierecken und Kreisen sowie Behandlung ihrer Eigenschaften; Längen- und Flächenberechnungen an diesen Figuren; Eigenschaften von geometrischen Körpern und Berechnungen an diesen Körpern (siehe OE, § 42).

Ziel des Oberstufenunterrichtes war (OE, § 43) die "Kenntnis und Durchübung der elementaren Geometrie und Algebra als streng beweisender Wissenschaft". Dazu wurden im Lehrplan außer Inhalten der Unterstufe noch angeführt: Negative, irrationale und imaginäre Zahlen; Logarithmen; lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten; quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten; Progressionen; Kombinatorik; ebene Trigonometrie; analytische Geometrie der Ebene mit Einschluss der Kegelschnittslinien. Der vollständige Text des Oberstufenlehrplans des Organisationsentwurfes ist in Abbildung 3 dargestellt.

Obergymnasium.

§. 43.

Ziel: Kenntniss und Durchübung der elementaren Geometrie und Algebra, als streng beweisender Wissenschaften.

§. 44.

I. Klasse, wöchentlich 4 Stunden.

Arithmetik, wöchentlich 2 Stunden.

Vom Zahlen-System überhaupt, und vom dekadischen insbesondere; Entwicklung des Begriffes der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, des Potenzirens und Wurzelausziehens; daraus Ableitung der negativen Zahlen (nebst Begründung der Rechnungen mit ihnen), der Brüche, der irrationalen Zahlen und imaginären Grössen. Die vier Grundrechnungen, angewendet auf eingliedrige und mehrgliedrige algebraische Ausdrücke. Allgemeine Eigenschaften und insbesondere Theilbarkeit der Zahlen. Vollständige Lehre von den Brüchen, und Lehre von den Proportionen, soweit dazu die Potenzlehre nicht erforderlich ist.

Geometrie, wöchentlich 2 Stunden.

Longimetrie und Planimetrie, in streng wissenschaftlicher Begründung.

II. Klasse, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik, im 1. Semester wöchentlich 2 Stunden, im 2. Semester wöchentlich 1 Stunde.

Vollständige Potenzlehre; Potenzen und Wurzeln in Anwendung auf ein- und mehrgliedrige algebraische Ausdrücke; Logarithmen, nebst mannigfacher Anwendung. Ergänzung der Lehre von den Proportionen. Gleichungen des 1. Grades mit Einer und mehreren Unbekannten. Gleichzeitige Anwendung der sechs Grundrechnungen auf mannigfach zusammengesetzte algebraische Mononome und Polynome; Reductionen zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke u. dgl.

Anmerkung. Der zuletztgenannte Gegenstand: „Gleichzeitige Anwendung etc." wird passend, als übende Wiederholung aller bisher vorgekommenen Rechnungen, der einen wöchentlichen Stunde des 2. Semesters aufbehalten.

Geometrie, im 1. Semester wöchentlich 1 Stunde, im 2. Semester wöchentlich 2 Stunden.

Stereometrie, dann ebene Trigonometrie mit reichlichen Rechnungsanwendungen. Wenn Zeit dazu übrig ist, die Elemente der sphärischen Trigonometrie.

III. Klasse, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik, im 1. Semester wöchentlich 2 Stunden, im 2. Semester wöchentlich 1 Stunde.

Unbestimmte Gleichungen des 1. Grades; quadratische Gleichungen mit Einer Unbekannten; Progressionen; Combinationslehre und binomischer Lehrsatz.

Geometrie, im 1. Semester wöchentlich 1 Stunde, im 2. Semester wöchentlich 2 Stunden.

Anwendung der Algebra, namentlich der quadratischen Gleichungen, auf die Geometrie; Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene, mit Einschluss der Kegelschnittslinien.

Abb. 3 (Mathematiklehrplan des Obergymnasiums, §43 - 44 des Organisationsentwurfes, ME vom 16.9.1849, Z. 6467)

Ergänzt wurde der Lehrplan durch die im Anhang VI des Organisationsentwurfes enthaltenen "Instruktionen zum Mathematikunterricht". Hier wurde betont, dass die Einsicht in den wissenschaftlichen Zusammenhang der Rechenoperationen und Zahlengrößen als Hauptaufgabe des arithmetischen und algebraischen Unterrichtes des Obergymnasiums anzusehen sei. Hinsichtlich der Geometrie wurde darauf hingewiesen, dass eine umfassende Kenntnis geometrischer Sätze und Beweise allein noch nicht als mathematische Bildung angesehen werden könne, sondern dass es wesentlich darauf ankäme, für Lehrsätze und Aufgaben selbst die Beweise oder die Auflösungen zu finden. Die Anforderungen der Maturitätsprüfung aus Mathematik wurden im §84 des Organisationsentwurfes folgendermaßen definiert:

"In der Planimetrie und Trigonometrie muss der Examinand so geübt sein, dass er die Beweise von Lehrsätzen, die Auflösungen von Aufgaben, welche in einfacher und nächster Beziehung zu den Hauptsätzen jener Gebiete stehen, nach kurzer Überlegung selbst zu finden im Stande ist; in den übrigen Gebieten der Geometrie muss er eine Verständnis bekundende Bekanntschaft mit den Hauptsätzen und ihren Beweisen haben. Ferner muss er einfache Gleichungen des ersten Grades mit Einer oder mehreren Unbekannten, und des zweiten Grades mit Einer Unbekannten leicht zu lösen, mit Logarithmen geläufig zu rechnen verstehen, und in den übrigen Gebieten der Arithmetik und Algebra mit den Hauptsätzen und mit ihrem wissenschaftlichen Zusammenhange bekannt sein." (siehe OE, §84, 6)

Diese Bestimmung wurde im Erlass vom 18. Juni 1878, Z.9645, durch die folgende Ergänzung abgeschwächt und war mit diesem Zusatz versehen bis einschließlich 1907 in den gültigen Maturitätsprüfungsbestimmungen enthalten:

"Im Allgemeinen aber ist nicht sowohl die nur durch besondere Vorbereitung zu erlangende Gewandtheit und Sicherheit in der Ableitung aller Lehrsätze, sondern vielmehr die Fähigkeit zu erproben, von denselben auf Grund klaren Verständnisses wissenschaftlichen Gebrauch zu machen." (ME vom 18. Juni 1878, Z.9645)

Viele Maturathemen der Jahre 1874 bis 1907 sind heute noch erhalten. Die Übersicht in Abschnitt 4 zeigt, dass das im Organisationsentwurf geforderte Beweisen von geometrischen Lehrsätzen in den vorliegenden Fragestellungen praktisch nie verlangt wurde. Wie in der Ergänzung von 1878 und auch in den Lehrplaninstruktionen von 1884 und

1900 vorgesehen, beschränkte man sich in der Geometrie auf das Lösen von konkreten Aufgabenstellungen.

Die Themen der vierstündigen schriftlichen Klausurarbeit aus Mathematik waren -wie auch heute noch- vom jeweils unterrichtenden Fachlehrer zu erstellen. Der Organisationsentwurf sah vor, dass der Lehrer zeitgerecht vor der schriftlichen Maturitätsprüfung dem zuständigen Landesschulinspektor "mehrere Aufgaben zur Wahl" zu stellen hatte (siehe OE, §80,1). Dieser sollte entweder aus den Vorschlägen auswählen oder, falls er die Fragen nicht für angemessen hielt, selbst andere Aufgaben stellen (siehe OE, §80,2). Erst ab 1900 wurde vom Lehrer verlangt auch die Ausarbeitungen der gestellten Aufgaben miteinzureichen. Bemerkenswert aus heutiger Sicht ist die Tatsache, dass die Themenstellungen der schriftlichen Klausurarbeiten den Schülern zu Beginn der Arbeitszeit diktiert wurden. (Erst 1920 wurde vorgeschrieben, die Fragen an die Tafel zu schreiben, und erst seit 1972 müssen die Fragen den KandidatInnen in Abschrift vorgelegt werden). Nicht zuletzt wegen dieses Diktierens hielt man eine "kurze und bündige" Formulierung der Aufgabenstellungen für wünschenswert (siehe WALLENTIN).

Hinsichtlich der Gestaltung der mündlichen Maturitätsprüfung sah der Organisationsentwurf (siehe OE, §83) vor, dass an jedem Prüfungstag höchstens 15 Examinanden geprüft werden sollten. Über die Dauer der einzelnen Prüfungen und über die Anzahl der zu stellenden Fragen wurden keine Vorschriften gemacht. Prüfer war der jeweilige Fachlehrer, aber auch der Vorsitzende durfte sich an der Prüfung beteiligen. Die Lehrer aller Pflichtfächer der letzten Klasse sowie der Direktor und der Vorsitzende waren als Mitglieder der Prüfungskommission verpflichtet, allen Prüfungen beizuwohnen. Da auch die Anwesenheit aller übrigen Lehrer der Anstalt bei den Prüfungen "dringend gewünscht" war, sah der Organisationsentwurf vor, an den Prüfungstagen den Unterricht in allen Klassen der Schule ausfallen zu lassen. Am Ende jedes Prüfungstages fand eine Sitzung der Prüfungskommission statt (siehe OE, § 85). Hier wurde zunächst über die Notenanträge der Prüfer zu den einzelnen Teilprüfungen abgestimmt. Nach dem Festlegen der Teilbeurteilungen der mündlichen Prüfungen wurde das Gesamtergebnis des jeweiligen Kandidaten beschlossen.

In einem Artikel der "Zeitschrift für das österreichische Gymnasium" aus 1872 wird der Ablauf der mündlichen Maturitätsprüfungen folgendermaßen beschrieben: "Für jeden Tag der mündlichen Prüfung werden in der Regel zehn Examinanden bestimmt. Die Prüfung beginnt des Morgens um 7 Uhr und dauert bis 12 Uhr Mittags; sie wird nach kurzer Rast, um 3 Uhr Nachmittags wieder aufgenommen und muss um 8 Uhr Abends geschlossen werden, weil dann erst auf die Prüfungs-Commision das ernste, das entscheidungsvolle, oft mehrstündige Officium der Classification und der Feststellung des Endurtheiles über die Reife der Examinanden wartet; eine Conferenz, deren Beschluss den ängstlich harrenden Abiturienten nicht selten in vorgerückter Nachtstunde verkündet wird. Den Reigen der Prüfung zu eröffnen ist in der Regel Sache des Mathematikers; nicht etwa als ob dieser Fachmann mit Prätension sich vordrängen wollte, sondern aus humaner Rücksicht auf die im Verlaufe des zehnstündigen Prüfungsactes naturnothwendig immer mehr erlahmende geistige Spannkraft der Examinanden lässt man ihm gerne den Vortritt. Für zehn Prüflinge braucht der Mathematiker, wenn er auch sehr massvoll in seinen Forderungen und dabei ganz gelassen ist, leicht volle zwei Stunden. ..."(siehe LANG).

Man darf daher annehmen, dass eine mündliche Teilprüfung -wie auch heute noch- nur ca. zehn bis fünfzehn Minuten gedauert hat. Die Fragestellungen der mündlichen Teilprüfungen aus Mathematik dieser Zeit sind heute nicht mehr erhalten.

Der Mathematiklehrplan des Organisationsentwurfes blieb bis 1884 in Kraft und wurde im Zuge der Lehrplanreformen von 1884 und 1900 nicht allzu wesentlich verändert. Im Lehrplan von 1884 (MV vom 26. 5. 1884, Z. 10128.) wurden nur einzelne Stoffabschnitte in frühere Klassen vorverlegt (Gleichungen ersten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten von der 6. in die 5. Klasse, Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten von der 7. in die 6. Klasse) bzw. neu in den Lehrplan aufgenommen (Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten und solche höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen; Zinseszinsen- und Rentenrechnung; Kettenbrüche; diophantische Gleichungen ersten Grades; goniometrische Gleichungen (alles in der 7. Klasse)). Ergänzt wurde der Lehrplan durch ausführliche (mehr als 50 Seiten umfassende) Instruktionen mit genauen, ins Detail gehenden methodischen und stofflichen Bemerkungen. Im Unterschied zu den kurzen, sehr allgemein gehaltenen Lehrplaninstruktionen des Organisationsentwurfes waren die Instruktionen von 1884 auf der Grundlage von 35 Jahren praktischer Erfahrung mit gymnasialem Mathematikunterricht erstellt worden. Hinsichtlich der inhaltlichen Gestaltung der Maturitätsprüfung aus Mathematik sahen die Lehrplaninstruktionen von 1884 Folgendes vor:

"Zeigt der Schüler bei der Maturitätsprüfung Sicherheit in der Auflösung der Gleichungen verschiedener Art, im Gebrauche und der Anwendung der Logarithmentafeln, ferner in jenen arithmetischen Partien, welche der Lehrplan in der VII. Classe anführt, legt er endlich durch die Auflösung passender Aufgaben eine gründliche Kenntnis der Grundlehren der ebenen Trigonometrie und der Grundbegriffe der analytischen Geometrie an den Tag, so ist dadurch für seine geistige Reife im mathematischen Denken eine sichere Bürgschaft gewonnen, er besitzt dann gewiss die Fähigkeit, bei einer späteren Verwertung seiner mathematischen Kenntnisse Einzelheiten, die in seinem Bewusstsein im Laufe der Zeit etwas in den Hintergrund getreten sind, selbständig aufzunehmen und zu ergänzen. Es ist zu empfehlen, in jede der Aufgabengruppen, welche für die schriftliche Maturitätsprüfung bestimmt sind, eine Aufgabe aus der Trigonometrie und eine aus der analytischen Geometrie aufzunehmen." (siehe MV vom 26.5.1884, Z.10128)

Der Lehrplan von 1900 und die zugehörigen Instruktionen (ME vom 23.2.1900, Z.5146.) brachten fast keine Veränderung gegenüber dem Lehrplan von 1884. Der vollständige Text des Mathematik-Oberstufenlehrplans von 1900 kann in Abbildung 4 nachgelesen werden.

Obergymnasium.

Lehrziel: Gründliche Kenntnis und Durchübung der elementaren Mathematik.

V. Classe, wöchentlich 4 Stunden.

Arithmetik, wöchentlich 2 Stunden: Wissenschaftlich durchgeführte

Lehre von den ersten vier Rechnungsoperationen. Begründung der einfachsten Regeln der Theilbarkeit der Zahlen. Theorie des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen, angewandt auch auf Polynome. Lehre von den Brüchen. Lehre von den Verhältnissen und Proportionen nebst Anwendungen. Lehre von den Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten nebst Anwendung auf praktisch wichtige Aufgaben.

Geometrie, wöchentlich 2 Stunden: Die geometrischen Grundgebilde. Parallelentheorie. Lehrsätze über das Dreieck einschließlich der Congruenzfälle; Lehrsätze über das Viereck und Vieleck; Lehrsätze über Winkel und Sehnen im Kreise, ferner über die dem Kreise ein- und umgeschriebenen Dreiecke und Vierecke. Proportionalität der Strecken und Ähnlichkeit der Figuren; hieraus resultierende Sätze über das Dreieck und über den Kreis. Flächengleichheit, einiges über Flächenverwandlung; Flächenberechnung. Regelmäßige Polygone, Kreismessung.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik: Lehre von den Potenzen und Wurzelgrößen, Begriff der irrationalen Zahlen. Die imaginäre Einheit. Lehre von den Logarithmen. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Geometrie: Stereometrie: Die wichtigsten Sätze über die Lagenverhältnisse der Geraden und Ebenen im Raume. Grundeigenschaften der körperlichen Ecke überhaupt und der dreiseitigen im besonderen. Eintheilung und Grundeigenschaften der Körper. Oberfläche und Rauminhalt des Prismas, der Pyramide und des Pyramidalstutzes. Berechnung des Rauminhaltes des Cylinders, des Kegels und des Kegelstumpfes sowie der Oberfläche der geraden Formen dieser Körper. Oberfläche und Inhalt der Kugel und ihrer einfach begrenzten Theile.

Ebene Trigonometrie: Goniometrische Functionen, Auflösung des rechtwinkeligen und des gleichschenkeligen Dreieckes. Weitere goniometrische Entwickelungen. Einfache goniometrische Gleichungen.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik: Höhere Gleichungen mit einer Unbekannten, welche sich auf quadratische zurückführen lassen, und einfache Formen quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten. Arithmetische und geometrische Progressionen. Zinseszins- und Rentenrechnung. Elemente der Combinationslehre. Binomischer Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

Geometrie: Hauptsätze zur Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke und deren Anwendung. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene mit Zugrundelegung des rechtwinkeligen Coordinatensystems und in einzelnen wichtigen Fällen auch der Polarcoordinaten: Analytische Behandlung der Geraden, des Kreises und der Kegelschnittslinien. Eigenschaften der letzteren mit Rücksicht auf Brennpunkte, Tangenten und Normalen. Quadratur der Ellipse und der Parabel.

VIII. Classe, wöchentlich 2 Stunden.

Wiederholung des gesammten Lehrstoffes der oberen Classen, besonders durch Lösung von Aufgaben rechnender und constructiver Art.

Abb. 4 (Mathematiklehrplan des Obergymnasiums, ME vom 23.2.1900, Z.5146.)

Bezüglich der Maturitätsprüfung wurde in den Lehrplaninstruktionen von 1900 angeordnet:

"Bei der schriftlichen Maturitätsprüfung dürfte es sich empfehlen, je eine Aufgabe aus der Arithmetik, der Trigonometrie, der Stereometrie und der analytischen Geometrie zu stellen. Durch die passende Auswahl kann und soll man sich immerhin von der richtigen Anwendung der planimetrischen Lehrsätze überzeugen. Die klar gefassten Aufgaben dürfen keineswegs Spitzfindigkeiten enthalten, welche die Kraft des Schülers auf eine harte Probe stellen. Wichtig ist es, dass bei der Stellung der Themen große Zahlenwerte vermieden werden, zumal die Erfassung der Theorie seitens des Schülers auch aus der Lösung von Problemen mit einfachen Zahlenwerten erkannt werden kann. Bei der mündlichen Maturitätsprüfung soll namentlich die Sicherheit in der Auflösung von Gleichungen verschiedener Art, im Gebrauche und in der Anwendung der Logarithmentafel, ferner in jenen arithmetischen Partien, welche der Lehrplan in der VII. Classe anführt, dann in der Behandlung trigonometrischer und analytischer Aufgaben und der Durchführung von stereometrischen Problemen, für die sich die Berechnung von Oberflächen und Körperinhalten besonders eignet, erprobt werden. Dem Zahlenrechnen ist im ganzen Obergymnasium und auch bei der Maturitätsprüfung die erforderliche Aufmerksamkeit zuzuwenden." (siehe ME vom 23. 2.1900, Z.5146.)

Wesentlichen Einfluss auf die tatsächliche Gestaltung des Mathematikunterrichtes im österreichischen Obergymnasium der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hatten die Schulbücher von Franz Mocnik Mocniks bereits 1850 in erster Auflage erschienene Bände "Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Obergymnasien" und "Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien" waren die ersten -und viele Jahre lang auch die einzigen- approbierten Schulbücher für den Mathematikunterricht des Obergymnasiums. Eine Untersuchung des Unterrichtsministeriums aus dem Jahr 1910 zeigt, dass auch noch in der Zeit zwischen 1890 und 1910, als es bereits mehrere approbierte Mathematikbücher für die Oberstufe gab, das Geometriebuch von Mocnik in 60 Prozent und das Algebrabuch sogar in 80 Prozent aller österreichischen Obergymnasien verwendet wurde (siehe FREUD). (Franz Mocnik (1814 - 1892) war bis 1850 Universitätsprofessor für Mathematik in Olmütz, danach Schulrat in Laibach und später Landesschulinspektor in Graz; er wurde 1862 auf Grund seiner Verdienste um das österreichische Schulwesen sogar in den Adelsstand erhoben)

Erst die Lehrplanreform von 1909 (MV vom 20.3.1909, Z.11662.) brachte essentielle Neuerungen im gymnasialen Mathematikunterricht: Die im Organisationsentwurf von 1849 eingeführte Zweistufigkeit des Lehrplans mit einem propädeutischen Unterricht in der Unterstufe und einem mehr wissenschaftlich orientierten Unterricht in der Oberstufe wurde 1909 durch eine Gliederung in dreijährige Unterstufe, zweijährige Mittelstufe und dreijährige Oberstufe ersetzt. Der Übergang zum systematischen Unterricht der Oberstufe sollte dadurch allmählicher erfolgen.

Als wesentliche inhaltliche Neuerung brachte der Lehrplan von 1909 eine starke Aufwertung des Funktionsbegriffes und die Berücksichtigung von Elementen der Differentialrechnung. Der Funktionsbegriff sollte den ganzen Lehrstoff durchdringen, Anregungen zum funktionalen Denken sollten bereits ab der zweiten Klasse erfolgen. In der vierten Klasse war die graphische Darstellung der linearen Funktion vorgesehen, in der Oberstufe nach und nach die Behandlung weiterer grundlegender Funktionen. In der siebenten Klasse sollte der Begriff des Differentialquotienten (geometrisch als Steigung der Tangente) eingeführt werden, ein "systematisches Differenzieren von Funktionen" war allerdings nicht vorgesehen. Neu in den Lehrplan aufgenommen wurden auch die "Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Umgekehrt verzichtete man auf die sogenannte wissenschaftliche Einleitung in die Arithmetik in der fünften Klasse, und auch die Behandlung der Gleichungen -insbesondere der höheren algebraischen und transzendenten Gleichungen- wurde stark reduziert.

Methodisch sah der neue Lehrplan eine stärkere Betonung des anschaulichen Moments vor. An verschiedenen Stellen des Lehrplans wurde das Anfertigen von Zeichnungen und Modellen sowie das Durchführen von Messungen (nicht nur im Schulzimmer, sondern "nach Möglichkeit auch im Gelände") verlangt. Als eine wichtige Zielsetzung des Unterrichtes wurde "die allseitige Anpassung des mathematischen Lehrstoffes an die Anwendungsgebiete des wirklichen Lebens" genannt. Diese Anwendungsorientierung des mathematischen Unterrichtes wurde auch in der Reifeprüfungsvorschrift des Jahres 1908 betont; die Anforderungen der verpflichtenden Mathematikprüfung im Rahmen der mündlichen Matura wurden hier folgendermaßen beschrieben:

"Der Abiturient hat einen Überblick über den auf der Oberstufe behandelten mathematischen Lehrstoff durch die Vertrautheit mit den Methoden der einzelnen Gebiete bei der Lösung von Aufgaben, und zwar abstrakten wie angewandten aus anderen Wissenschaften (auch der Physik) und dem praktischen Leben zu erweisen. Auszuschließen sind Aufgaben, welche eine nur durch ungewöhnliche Übung erlangte Gewandtheit in algebraischen Umformungen und in geometrischen Konstruktionen oder die Kenntnis vieler, bloß gedächtnismäßig festzuhaltender, namentlich praktisch belangloser Einzelheiten und Formeln verlangen. Weiters ist Fertigkeit im Rechnen mit besonderen Zahlen und im Gebrauche der logarithmischen Tafeln besonders auch in der Hinsicht zu verlangen, dass diese Tafeln zur Vermeidung umständlichen Ziffernrechnens mit Vorteil herangezogen werden." (siehe MV vom 29. 2. 1908, Z. 10051., §19)

V. Klasse, wöchentlich 3 Stunden.

Erweiterungen und Ergänzungen des arithmetischen Lehrstoffes der vorausgegangenen Klasse; fortgesetztes Lösen von Gleichungen des ersten Grades aus mannigfaltigen Anwendungsgebieten. Potenzen und Wurzeln, eingeübt an ungekünstelten Beispielen.

Stereometrie: Schrägrisse einfachster Körperformen (auch von Kristallgestalten), Grund- und Aufriß einfacher Gebilde nach der Anschauung. Begriffe und Gesetze über die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen unter Beschränkung auf die grundlegenden und typischen Sätze und Beweise und mit Bezugnahme auf die Anschauung. Eigenschaften, Flächen- und Rauminhaltsberechnungen der Prismen (Zylinder), Pyramiden (Kegel), der Kugel und ihrer Schnittflächen und Schnittkörper. Eulers Satz, regelmäßige Polyeder. -

Oberstufe (3 Jahre).

Lehrziel: Abschluß der sogenannten elementaren Mathematik samt Erfassen und Anwenden des Funktionsbegriffes.

VI. Klasse, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik: Logarithmen. Die Gleichungen des zweiten Grades mit einer (und leichteste mit mehreren) Unbekannten. Einfachste Gleichungen höherer Grade, die sich ohne Kunstgriffe auf quadratische zurückführen lassen. Irrationale, imaginäre und komplexe Zahlen, insoweit das Lösen jener Gleichungen auf sie führt. Graphische Darstellung der quadratischen Funktion und ihre Verwendung zur Auflösung quadratischer Gleichungen.

Goniometrie und Trigonometrie: Die Winkelfunktionen, ihre graphische Darstellung, namentlich auch benützt zum Einprägen der Eigenschaften und Beziehungen dieser Funktionen. Auflösung der Dreiecke. Wiederholende Vergleichung der trigonometrischen Sätze und Methoden mit planimetrischen und stereometrischen. Vielseitige Anwendung der Trigonometrie zu Aufgaben der Feldmessung, Geographie, Astronomie u. s. w., wobei die Bestimmungsstücke möglichst durch (wenn auch rohe) Messungen seitens der Schüler zu beschaffen sind.

VII. Klasse, wöchentlich 3 Stunden.

Arithmetik: Arithmetische Reihen (erster Ordnung), geometrische Reihen, Anwendung der letzteren namentlich auf Zinseszinsrechnung. Permutieren, Variieren, Kombinieren in einfachsten Fällen. Binomischer Satz für ganze positive Exponenten. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Analytische Geometrie: Anknüpfend an die bisher für einzelne Funktionen gegebenen graphischen Darstellungen nunmehr Anwendung der analytischen Methode auf die Linien des ersten und zweiten Grades unter gelegentlichen Hinweisen auf die planimetrische Behandlung der nämlichen Gebilde und Beziehungen.

Darstellung der Richtungskoeffizienten hauptsächlich der im Unterricht behandelten Kurven mittels des Differentialquotienten. Angenäherte Lösung algebraischer (und gelegentlich vorkommender einfachster transzendenter) Gleichungen durch graphische Methoden.

VIII. Klasse, wöchentlich 2 Stunden.

Zusammenfassende Wiederholungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichtes, namentlich der Gleichungen und Reihen, der Stereometrie, Trigonometrie und analytischen Geometrie. Erweiterungen und Vertiefungen an einzelnen Stellen. Anwendungen auf die verschiedenen Gebiete des Unterrichtes und des praktischen Lebens an Stelle bloß formalistischer Aufgaben.

Rückblicke und Ausblicke nach geschichtlichen und philosophischen Gesichtspunkten.

Abb. 5 (Mathematiklehrplan des Gymnasiums, MV vom 20.3.1909, Z. 11662.)

4. Aufgabenstellungen bei schriftlichen Maturitätsprüfungen aus Mathematik

Die Themenstellungen der schriftlichen Maturitätsprüfungen der ersten Jahre des neugestalteten Gymnasiums sind heute nicht mehr erhalten. Erst in den Siebzigerjahren des vorigen Jahrhunderts begann man damit, die Maturathemen in den Jahresberichten der Schulen abzudrucken. Die zahlreichen dadurch heute noch vorhandenen Maturathemen aus der Zeit zwischen 1874 und 1907 geben einen Einblick in die Anforderungen des Mathematikunterrichtes dieser Jahre und zeigen außerdem, wie sich Art und Umfang der Fragestellung bei der schriftlichen Mathematikmatura im Lauf dieser drei Jahrzehnte weiterentwickelt hat. In den Jahren 1908 bis 1918 war Mathematik nur noch ein für alle SchülerInnen verpflichtendes mündliches Prüfungsfach im Rahmen der Reifeprüfung. Die Fragestellungen dieser ca. zehn bis fünfzehn Minuten dauernden mündlichen Prüfungen sind heute nicht mehr erhalten.

In den Schuljahren 1873/74 bis 1906/07 hat es an Wiener Gymnasien insgesamt 392 Themenstellungen bei schriftlichen Maturitätsprüfungen gegeben (97 Themenstellungen in den Jahren 1873/74 bis 1883/84, 194 Themen in den Jahren 1884/85 bis 1899/00 und 101 Themen in den Jahren 1900/01 bis 1906/07). 190 dieser Themen, d.h. fast die Hälfte aller Fragestellungen aus dem Bereich des heutigen Bundeslandes Wien, wurden für die folgende Übersicht untersucht. Einige exemplarisch ausgewählte Maturathemen sind in einem Anhang dieses Artikels abgebildet.

In fast allen der vorliegenden Maturathemen wurden vier voneinander unabhängige Aufgaben gestellt. (Nur eine einzige von 190 Themenstellungen enthält fünf und alle übrigen vier Aufgaben.)

Bei den Maturitätsprüfungen der Siebzigerjahre des 19. Jahrhunderts waren im Allgemeinen nur sehr elementare Aufgaben zu bearbeiten, die weder vom Umfang noch vom Schwierigkeitsgrad her mit Maturafragen unserer Zeit verglichen werden können. (Konkrete Beispiele findet man in den Abbildungen 11 bis 17). Man darf annehmen, dass sich auch die heute nicht mehr erhaltenen Maturafragen der Jahre davor auf ähnlich einfachem Niveau bewegt haben. In der Zeit zwischen 1885 und 1907 waren die Fragestellungen im Allgemeinen umfangreicher und auch inhaltlich anspruchsvoller als in den Siebzigerjahren. Zur Lösung mancher dieser Aufgaben waren spezielle Detailkenntnisse erforderlich, über die heutige MaturantInnen auf Grund der mittlerweile wesentlich geänderten Lehrpläne nicht mehr verfügen. (Beispiele für Maturathemen dieser Zeit sind in den Abbildungen 18 bis 32 dargestellt.)

In Abbildung 6 werden die vorliegenden 761 Maturaaufgaben der Jahre 1874 bis 1907 nach Themenbereichen zusammengefasst: Fast alle Fragestellungen können einem der fünf Stoffgebiete Gleichungen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Planimetrie/ebene Trigonometrie, Stereometrie bzw. ebene analytische Geometrie zugeordnet werden.

Abbildung 6 zeigt, dass die Zahl der Aufgabenstellungen aus der Geometrie im Lauf der Zeit zugenommen hat, wohingegen Fragestellungen aus dem Bereich der Arithmetik zahlenmäßig zurückgingen. Diese stärkere Betonung der Geometrie stand im Einklang mit den jeweils gültigen Lehrplaninstruktionen: Die in den Instruktionen des Jahres 1884 enthaltene Empfehlung, in jede Aufgabengruppe eine Aufgabe aus der Trigonometrie und eine aus der analytischen Geometrie aufzunehmen, hatte eine Zunahme der Aufgaben aus der analytischen Geometrie zur Folge. Die Instruktionen des Jahres 1900 empfahlen, je eine Aufgabe aus der Arithmetik, der Trigonometrie, der Stereometrie und der analytischen Geometrie zu stellen, und führten daher zu einer noch stärkeren Betonung der Geometrie.

	73/74 - 83/84	84/85 - 99/00	00/01 - 01/07
Zahl der Themenstellungen	50	90	50
Gesamtzahl der Aufgaben	201	360	200
Aufgaben aus der Arithmetik	**84**	**133**	**58**
Davon:			
Gleichungen	54	79	38
Zinseszins- und Rentenrechnung	19	51	20
Sonstige arithmetische Aufgaben	11	3	0
Aufgaben aus der Geometrie	**117**	**227**	**142**
Davon:			
Planimetrie und ebene Trigonometrie	46	61	47
Stereometrie	33	77	45
Ebene analytische Geometrie	38	89	50

Abb.6 (Einteilung der Maturafragen nach Stoffgebieten)

In allen drei betrachteten Lehrplanperioden waren **Gleichungen** die mit Abstand häufigsten Fragestellungen aus dem Bereich der Arithmetik. Das Lösen von Gleichungen war neben dem Arbeiten mit den Logarithmentafeln zentrale Anforderung des Arithmetikunterrichtes der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts. Der Lehrplan von 1849 sah Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten sowie quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten vor, die Lehrpläne von 1884 und 1900 darüber hinaus auch quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten und solche höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Abbildung 6 zeigt, dass eine große Zahl von Maturaaufgaben das Lösen von Gleichungen zum Inhalt hatte. Daneben spielte das Lösen von Gleichungen aber auch bei den Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie sowie beim Umformen geometrischer Formeln in den Aufgaben zur Trigonometrie und Stereometrie eine wesentliche Rolle.

In Abbildung 7 findet man eine Übersicht der vorhandenen Gleichungsaufgaben: In jeder der drei betrachteten Lehrplanperioden waren ca. zwei Drittel dieser Fragestellungen Textgleichungen. Nur in einem Drittel der Gleichungsaufgaben war die zu lösende Gleichung bzw. das zu lösende System unmittelbar vorgegeben. Den vorliegenden Themenstellungen kann man entnehmen, dass der Schwierigkeitsgrad der bei Maturitätsprüfungen gefragten Gleichungsaufgaben nach der Lehrplanreform von 1884 zugenommen hat. Anstelle von Gleichungen in einer Variablen waren ab 1885 vermehrt nichtlineare Gleichungssysteme in zwei bis vier Unbekannten zu lösen. In der dritten Lehrplanperiode ging die Zahl der Gleichungsaufgaben zurück, und es kam auch zu keiner weiteren Steigerung des Schwierigkeitsgrades.

	73/74 - 83/84	84/85 - 99/00	00/01 - 06/07
Zahl der Themenstellungen	50	90	50
Zahl der Gleichungsaufgaben	54	79	38
Eine Gleichung in einer Unbekannten	**11**	**7**	**5**
Davon: Wurzelgleichung oder Bruchgleichung Exponentialgleichung oder Logarithmische Gleichung Polynomgleichung 3. oder 4. Grades	 5 4 2	 0 5 2	 0 3 2
Gleichungssystem mit 2 bis 4 Unbekannten	**7**	**20**	**8**
Davon: Lineares Gleichungssystem mit 3 Unb. Nichtlineares Polynomgleichungssystem (2 bis 4 Unbekannte) System aus Wurzelgleichungen (2 Unb.) System aus Exponentialgleichungen oder logarithm. Gleichungen (2 Unb.)	 3 2 1 1	 0 7 11 2	 0 2 2 4
Textgleichungsaufgaben	**36**	**52**	**25**
Davon: Aufgaben im Zusammenhang mit endlichen arithmetischen und/oder geometrischen Reihen Aufgaben, die auf lineare diophantische Gleichungen führen Sonstige Textgleichungen	 18 6 12	 24 12 16	 14 4 7

Abb. 7 (Maturafragen aus dem Stoffgebiet Gleichungen)

Bemerkenswert ist, dass es in etwa der Hälfte der vorliegenden Textgleichungsaufgaben um den Begriff der endlichen arithmetischen oder geometrischen Reihe ging: Unter Verwendung der definierenden Eigenschaften arithmetischer bzw. geometrischer Reihen war eine quadratische Gleichung oder ein nichtlineares Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen. Beispiele für solche Aufgaben findet man in den Abbildungen 12, 14, 15, 19, 24, 26, 30 und 31. Eine zweite Gruppe von Textgleichungen betraf Aufgaben, die auf lineare diophantische Gleichungen führten (siehe Abbildung 16 und 21). Daneben gab es verschiedene andere Textgleichungsaufgaben, wie Teilungsaufgaben, Mischungsaufgaben, Aufgaben über Zahlen und Ziffern sowie Aufgaben mit geometrischem oder physikalischem Kontext (siehe Abbildung 13, 17, 21 und 25). Nur in den

Fragestellungen der ersten Lehrplanepoche findet man einzelne einfachste Textaufgaben, die mit Hilfe einer linearen Gleichung in einer Unbekannten gelöst werden konnten (und nach heutigem Lehrplan der dritten oder vierten Klasse AHS entsprechen).Alle übrigen Textgleichungsfragen führten auf quadratische Gleichungen bzw. Gleichungssysteme oder auf lineare diophantische Gleichungssysteme.

Eine zweite große Gruppe von arithmetischen Aufgaben betraf die **Zinseszinsen- und Rentenrechnung**. Etwa 40 Prozent der vorliegenden Maturathemen der ersten und der dritten Lehrplanperiode und sogar mehr als die Hälfte der Themen der zweiten Lehrplanperiode enthalten eine Aufgabe zu diesem Stoffgebiet.

Zinseszinsen- und Rentenrechnung war erst in den Lehrplänen von 1884 und 1900 expressis verbis genannt, im Lehrplan des Organisationsentwurfes kam diesbezüglich nur der Begriff "Progressionen" vor. Trotzdem waren Fragestellungen zur Zinseszinsen- und Rentenrechnung schon in den Maturathemen der Siebzigerjahre stark vertreten. Verantwortlich dafür war vermutlich die Tatsache, dass dieses Stoffgebiet im damals weit verbreiteten Schulbuch von Mocnik als Anwendung der Progressionen ausführlich behandelt wurde (siehe MOCNIK, 1872).

Die Maturafragen zur Zinseszinsen- und Rentenrechnung haben sich im betrachteten Zeitraum von 1874 bis 1907 nur wenig verändert. In der Mehrzahl dieser Aufgaben ging es um die Tilgung einer Schuld durch gleichbleibende jährliche Raten bzw. um eine Einmalzahlung eines Geldbetrags mit anschließendem Bezug einer jährlichen Rente, wobei üblicherweise ganzjährige Kapitalisierung angenommen wurde. Zu bestimmen war entweder die Höhe der jährlichen Rate oder die Größe der Einmalzahlung bzw. der Schuld oder die Anzahl der jährlichen Raten. In einigen Aufgaben wurde die Fragestellung dahingehend variiert, dass dem Bezug einer gleichbleibenden jährlichen Rente statt einer Einmalzahlung regelmäßige jährliche Zahlungen vorausgingen bzw. dass der Zinssatz während der Rentenzahlung geändert wurde. Nur in ganz wenigen Aufgaben wurden halbjährlich fällige Renten oder ein Kapitalwachstum bei halbjähriger Kapitalisierung betrachtet. (Konkrete Beispiele findet man in den Abbildungen 13, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28 und 29.) Bei den Aufgabenstellungen zur Zinseszinsen- und Rentenrechnung ging es im Wesentlichen um das Arbeiten mit der Summenformel für endliche geometrische Reihen und daneben auch um die geläufige Anwendung der logarithmischen Tafeln.

Die vorliegenden Maturaaufgaben lassen vermuten, dass das Arbeiten mit endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen im Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts einen hohen Stellenwert hatte: Der Begriff der endlichen arithmetischen bzw. geometrischen Reihe wurde in ca. 70 Prozent der vorliegenden Themenstellungen der ersten und der dritten und sogar in 77 Prozent der Themen der zweiten Lehrplanperiode im Rahmen einer Textgleichungsaufgabe und/oder einer Frage zur Zinseszinsen- und Rentenrechnung berücksichtigt. (Unendliche geometrische Reihen kamen dagegen nur in ganz wenigen Fragestellungen (zur Planimetrie oder zur Stereometrie) vor.)

In Abbildung 6 werden 14 **"sonstige arithmetische Aufgaben"** angeführt. In fast allen diesen Aufgaben ging es um die Entwicklung von Ausdrücken nach dem binomischen

Lehrsatz. (So war, zum Beispiel, als Frage gestellt, einen Näherungswert der Zahl $\sqrt[5]{99625}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes zu ermitteln.) Nur in drei Aufgaben kamen komplexe Zahlen vor (Hier war etwa in einer Aufgabe der Ausdruck $(2x^{2/3}\sqrt{a} + bi)^5$ klammerfrei darzustellen), und nur in einer einzigen Aufgabe wurde auf Näherungsbrüche für einen Kettenbruch Bezug genommen.

Alle Maturaaufgaben aus dem Bereich der Geometrie können einem der drei Gebiete Planimetrie/ebene Trigonometrie, Stereometrie oder ebene analytische Geometrie zugeordnet werden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass es in fast allen diesen Aufgaben ausschließlich oder überwiegend um Berechnungen ging. Beweisaufgaben kamen fast überhaupt nicht vor, reine Konstruktionsaufgaben nur sehr vereinzelt.

Fragestellungen aus der **Planimetrie und der ebenen Trigonometrie** spielten während des gesamten betrachteten Zeitraumes eine große Rolle. Abbildung 8 zeigt, dass fast alle Aufgaben zu diesem Stoffgebiet trigonometrische Berechnungen zum Inhalt hatten. Planimetrische Aufgaben, die ohne Anwendung der Trigonometrie zu lösen waren, wurden nur sehr selten gestellt. Auch das Lösen von goniometrischen Gleichungen, das in den Lehrplänen von 1884 und 1900 beim Stoffgebiet Trigonometrie angeführt war, wurde nur in wenigen Arbeiten verlangt. In der einzigen vorkommenden Beweisaufgabe war die Herleitung eines Additionstheorems für Winkelfunktionen gefragt.

	73/74 - 83/84	84/85 - 99/00	00/01 - 06/07
Zahl der Themenstellungen	50	90	50
Zahl der Aufgaben zur Planimetrie und ebenen Trigonometrie	46	61	47
Davon:			
Goniometrische Gleichungen	1	4	4
Beweisaufgaben	0	1	0
Planimetrische Aufgaben ohne Trigonometrie	5	6	6
Trigonometrische Berechnungen	40	50	37
Davon:			
Einfachste Grundaufgaben zum Sinus- und Cosinussatz	12	2	0
Schwierigere Aufgaben zur trigonometrischen Auflösung von Dreiecken	10	25	27
Trigonometrische Aufgaben zu Vierecken, regelmäßigen Vielecken bzw. Kreisteilen	11	15	6
Anwendung der Trigonometrie auf Vermessungsaufgaben oder physikalische Fragestellungen	7	8	4

Abb.8 (Maturafragen aus dem Stoffgebiet Planimetrie und ebene Trigonometrie)

In mehr als der Hälfte der Aufgabenstellungen zur ebenen Trigonometrie ging es um die Auflösung eines durch drei Bestimmungsstücke vorgegebenen Dreiecks, eine zweite Gruppe von Aufgaben betraf trigonometrische Berechnungen an Vierecken, regelmäßigen Vielecken oder Kreisteilen. Anwendungsaufgaben, wie zum Beispiel einfache Vermessungsaufgaben, kamen daneben nur in geringerer Zahl vor.

Die vorliegenden Dreiecksaufgaben unter den Maturafragen lassen darauf schließen, dass das Stoffgebiet Trigonometrie nach der Lehrplanreform von 1884 wesentlich umfangreicher im Unterricht behandelt wurde als in der ersten Lehrplanperiode: In 12 der 50 Themenstellungen der ersten Zeit waren einfachste Grundaufgaben zum Sinus- bzw. Cosinussatz zu lösen, d.h. fehlende Seitenlängen und Winkel eines Dreiecks zu bestimmen, das durch drei Seiten, durch zwei Seiten und einen Winkel bzw. durch eine Seite und zwei Winkel gegeben war (siehe Abbildung 11 und 13). Auch im Zusammenhang mit regelmäßigen Vielecken und Kreisteilen ging es meist um einfachste Anwendungen der Winkelfunktionen in gleichschenkeligen Dreiecken (siehe Abbildung 17). In der Zeit zwischen 1885 und 1900 wurden einfache Grundaufgaben zum Sinus- bzw. Cosinussatz nur mehr in zwei Arbeiten und ab 1901 überhaupt nicht mehr gestellt. Stattdessen gab es eine Vielfalt an schwierigeren Fragestellungen zur Auflösung von Dreiecken: Die gegebenen Dreiecke wurden festgelegt durch, zum Beispiel: a, h_c, ρ oder r, ρ, γ oder b, h_a, h_c oder h_a, w_a, α oder a, h_a, s_c oder β, h_b, s_b oder $c, h_c, a+b$ oder $b-c, \beta-\gamma, a$ oder $b+c, \beta-\gamma, r$ oder h_a+h_b, γ, r oder $c-a, \alpha, \rho$ oder $a:b, \alpha:\beta, c$ (wobei a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkel, h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen, w_a, w_b, w_c, die Längen der Winkelsymmetralen, sa, sb, sc die Längen der Schwerlinien, r den Umkreis- und ρ den Inkreisradius des Dreiecks bezeichnen). Auf Grund dieser Fragestellungen ist anzunehmen, dass nach 1884 -in Übereinstimmung mit den Forderungen der Lehrplaninstruktionen von 1884 und 1900- neben dem Sinus- und dem Cosinussatz auch die Mollweideschen Gleichungen, der Tangenssatz und die Halbwinkelsätze im Unterricht behandelt wurden.

Aus Abbildung 8 geht hervor, dass nur ca. zwei Drittel der vorliegenden Maturathemen der zweiten Lehrplanperiode eine Aufgabe zum Stoffgebiet Planimetrie und ebene Trigonometrie enthielten. Trotzdem wurde das Arbeiten mit Winkelfunktionen in fast allen Arbeiten dieser Jahre verlangt, da auch in mehr als der Hälfte der stereometrischen Aufgaben trigonometrische Berechnungen durchzuführen waren.

Aus dem Gebiet der **Stereometrie**, das ebenfalls bereits seit 1849 im Oberstufenlehrplan verankert war, wurden bei den Maturitätsprüfungen üblicherweise Aufgaben zur Volums- und/oder Oberflächenberechnung grundlegender geometrischer Körper gestellt. In diesen Aufgaben ging es um Kugeln, Kugelsegmente, Kugelsektoren, Drehkegel, Drehkegelstümpfe, Pyramiden, Pyramidenstümpfe, Drehzylinder bzw. Prismen. Konkrete Beispiele findet man in den Abbildungen 12, 14, 15, 16 sowie 18 bis 32. Zur Lösung der stereometrischen Aufgaben war nicht nur die Kenntnis der Oberflächen- und Volumsformeln der jeweiligen Körper erforderlich, sondern üblicherweise waren auch noch andere elementargeometrische Lehrsätze wie etwa der Strahlensatz, der Satz von Pythagoras, Sätze über Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken oder trigonometrische Formeln anzuwenden. Da die Verwendung von Formelsammlungen bei den

Maturitätsprüfungen nicht gestattet war, mussten die Schüler eine große Zahl an geometrischen Formeln auswendig wissen.

Abbildung 9 zeigt, dass die Zahl der stereometrischen Fragestellungen im Zeitraum 1874 bis 1907 zugenommen hat: Während nur ca. zwei Drittel der vorliegenden Maturathemen der ersten Lehrplanperiode eine stereometrische Frage enthielten, war dies bei ca. 90 Prozent der Arbeiten der dritten Lehrplanperiode der Fall. Außerdem ist auch eine Zunahme der Komplexität der Fragestellungen festzustellen. (Man vergleiche etwa die stereometrischen Aufgaben in den Abbildungen 12, 14, 15 und 16 mit jenen der Abbildungen 24, 26, 27 und 30.) Abbildung 9 zeigt, dass in der zweiten und dritten Lehrplanperiode vermehrt Aufgaben zu Kugelteilen sowie zu Drehkegelstümpfen gestellt und dass neben Volumsberechnungen verstärkt auch Mantel- bzw. Oberflächenberechnungen verlangt wurden. In der dritten Lehrplanperiode waren überdies in fast der Hälfte der Fragestellungen Berechnungen mit Variablen statt mit konkreten Zahlenwerten durchzuführen.

	73/74 - 83/84	84/85 - 99/00	00/01 - 06/07
Zahl der Themenstellungen	50	90	50
Zahl der Aufgaben zur Stereometrie	33	77	45
Zahl der Aufgaben zum Arbeiten mit Formeln für:			
Kugel (davon Kugelsegment bzw. Kugelsektor)	17 (5)	36(21)	25 (13)
Drehkegel (davon Drehkegelstumpf)	13 (0)	44 (14)	25 (7)
Pyramide (davon Pyramidenstumpf)	4 (2)	13 (3)	10 (2)
Drehzylinder	4	8	7
Prisma	6	4	1
Volumsberechnungen	27	64	39
Mantel- bzw. Oberflächenberechnungen	12	40	23
Berechnungen von Masse bzw. Dichte	4	4	3
Aufgaben, in denen Berechnungen mit Variablen verlangt waren	11	28	21

Abb. 9 (Maturafragen aus dem Stoffgebiet Stereometrie)

Als drittes geometrisches Stoffgebiet, das in den vorliegenden Maturaarbeiten berücksichtigt wurde, ist die **ebene analytische Geometrie** zu nennen. Aus Abbildung 10 geht hervor, dass es in den meisten Fragestellungen zur analytischen Geometrie um Berechnungen mit konkreten Zahlenwerten ging. In der ersten Lehrplanperiode waren in ca. einem Fünftel der Aufgaben neben Berechnungen auch Konstruktionen durchzuführen. Später wurden umfangreichere Berechnungen verlangt, und auf Konstruktionen wurde mehr und mehr verzichtet. Beweisaufgaben und auch Aufgaben zu Ortslinien wurden insgesamt sehr selten gestellt.

	73/74 - 83/84	84/85 - 99/00	00/01 - 06/07
Zahl der Themenstellungen	50	90	50
Zahl der Aufgaben zur ebenen analytischen Geometrie	**38**	**89**	**50**
Davon:			
Aufgaben zur linearen analytischen Geometrie	9	9	5
Aufgaben zur analytischen Geometrie des Kreises	16	24	7
Aufgaben zu Kegelschnitten	13	56	38
Beweisaufgaben	3	1	2
Aufgaben zu Ortslinien	1	4	1
Aufgaben, in denen auch Konstruktionen verlangt waren	8	9	2
Berechnungsaufgaben mit konkreten Zahlenwerten	21	69	31
Aufgaben, in denen Berechnungen mit Variablen verlangt waren	5	6	13
Zahl der Aufgaben zum Arbeiten mit:			
Kreisgleichungen	19	36	19
Ellipsengleichungen	2	25	18
Hyperbelgleichungen	4	5	5
Parabelgleichungen	7	30	21
Gleichungen für Tangenten an Kreise oder Kegelschnitte	7	56	29
Typische Fragestellungen			
Schnittpunkte Kreis - Gerade	9	5	3
Schnittpunkte Kegelschnitt - Gerade	3	16	3
Schnittpunkte zweier Kreise, zweier Kegelschnitte oder eines Kreises und eines Kegelschnittes	3	15	13
Tangente in einem Punkt eines Kreises oder Kegelschnittes aufstellen	4	35	15
Gemeinsame Tangenten zweier Kreise bzw. Kegelschnitte ermitteln	1	6	5
Zu einer gegebenen Geraden parallele Tangenten ermitteln	1	6	5
Von einem Punkt aus Tangenten legen	1	9	4
Inhalt einer Parabelsegmentfläche	2	11	10

Abb. 10 (Maturafragen aus der ebenen analytischen Geometrie)

Inhaltlich kann man die vorliegenden Aufgaben in Fragestellungen zur linearen analytischen Geometrie, zur analytischen Geometrie des Kreises und zur analytischen Geometrie der Kegelschnitte (wobei fast ausschließlich Kegelschnitte in erster Hauptlage betrachtet wurden) gliedern. In den Siebzigerjahren wurden noch in mehreren Arbeiten einfachste Aufgaben aus der linearen analytischen Geometrie gestellt (siehe etwa Abbildung 12 und 16), neun der 38 vorliegenden Aufgaben der ersten Lehrperiode sind der linearen analytischen Geometrie zuzuordnen. Sechzehn Aufgaben betrafen die analytische Geometrie des Kreises; hier wurde in neun Fällen verlangt, die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden zu bestimmen (siehe etwa Abbildung 11). Gleichungen für Kegelschnittslinien kamen in ca. einem Drittel der Arbeiten vor.

Obwohl der Lehrplan von 1884 hinsichtlich der Anforderungen aus der analytischen Geometrie mit dem Lehrplan von 1849 wörtlich übereinstimmt (beide Lehrpläne enthalten in Bezug auf dieses Stoffgebiet nur die Formulierung "Elemente der analytischen Geometrie mit Einschluss der Kegelschnittslinien"), zeigen die Maturaaufgaben zur analytischen Geometrie nach 1885 eine deutliche Zunahme sowohl des Schwierigkeitsgrades als auch des Umfangs gegenüber den Aufgaben aus der Zeit vorher. Aufgaben aus der linearen analytischen Geometrie und Aufgaben zu Kreisen gingen in der zweiten und dritten Lehrplanperiode mehr und mehr zurück, Aufgaben im Zusammenhang mit Kegelschnitten nahmen dagegen zahlenmäßig stark zu. In fast zwei Drittel der vorliegenden Maturathemen der zweiten und sogar in drei Viertel der Themen der dritten Lehrplanperiode wurde das Arbeiten mit Gleichungen für Kegelschnitte verlangt. Auch Tangentengleichungen spielten eine wesentlich größere Rolle als in den Siebzigerjahren. In der dritten Lehrplanperiode waren außerdem in etwa einem Viertel der Arbeiten Berechnungen mit Variablen statt mit konkreten Zahlenwerten durchzuführen.

Literatur

BONITZ, H.: Statistische Übersicht über die österreichischen Gymnasien und Realschulen am Schlusse des Schuljahres 1862/63. In: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, 14. Jg., XII. Heft. Wien 1863.

BÜRGER, H.: Zur Entwicklung des Mathematikunterrichtes in Österreich unter besonderer Berücksichtigung der Zeit seit 1945. In: Naturwissenschaftlicher Unterricht und Wissenskumulation. Geschichtliche Entwicklung und gesellschaftliche Auswirkungen. Bad Heilbrunn 1988, S. 317-333.

DINTZL, E.: Der mathematische Unterricht an den Gymnasien. In: Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, Heft 3. Wien 1910.

ENGELBRECHT, H.: Geschichte des österreichischen Bildungswesens. Erziehung und Unterricht auf dem Boden Österreichs. Bd. 4. Wien 1986.

FICKER, A.: Bericht über das österreichische Unterrichtswesen. Aus Anlass der Weltausstellung 1873, 1. Theil: Geschichte, Organisation und Statistik des österreichischen Unterrichtswesens. Wien 1873.

FREUD, P.: Die mathematischen Schulbücher an den Mittelschulen und verwandten Lehranstalten. In: Berichte über den mathematischen Unterricht in Österreich, Heft 6. Wien 1910.

HOCHEGGER, F.: Statistische Übersicht über die österreichischen Gymnasien und Realschulen am Schlusse des Schuljahres 1871/72. In: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, 23. Jg., XII. Heft. Wien 1872.

HÖLDER, A. (Hrsg.): Die Mittelschulenquete im k.k. Ministerium für Kultus und Unterricht.

Wien, 21.-25. Jänner 1908. Stenographische Protokolle. Wien 1908.
KLEEMANN, J.R.v.: Die neue Organisation der österreichischen Gymnasien in ihrer Durchführung und ihren Ergebnissen während der Schuljahre 1850, 1851 und 1852. Wien 1852.
LANG, A.: Über die Maturitätsprüfung an den österreichischen Gymnasien. In: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, 23. Jg., Wien 1872, S. 199 - 216.
MARENZELLER, E., Edler von (Hrsg): Normalien für die Gymnasien und Realschulen in Österreich, 1. Theil: Gymnasien. Wien 1884.
MATOUSEK, P.T.A. (Hrsg.): Normaliennachschlagebuch für Lehrer und Direktoren der österreichischen öffentlichen Gymnasien. Prag 1857, 1864, 1875.
MEISTER, R.: Entwicklung und Reformen des österreichischen Studienwesens. Teil 1. In: Sitzungsberichte der philosophisch-historischen Klasse der Österr. Akademie der Wissenschaften. Wien 1963.
MOCNIK, F.: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Ober-Gymnasien, 12. Auflage. Wien 1872.
MOCNIK, F.: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung für die oberen Classen der Mittelschulen, 25. Auflage. Wien und Prag 1898.
MOCNIK, F.: Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen, 15. Auflage. Wien 1879.
MOSSER, P. u. REITTERER, T.: Die Mittelschulen in Österreich. Wien 1929.
RATHMEIER, H.: Entwicklungslinien der AHS-Reifeprüfung. In: Erziehung und Unterricht, Heft 10. Wien 1991, S. 815-823.
PTASCHNIK, J.: Die Maturitätsprüfung und die Dispensen. In: Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, 40. Jg., Wien 1889, S. 1040 - 1054.
REDER, R.: Die Entwicklung der Schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik seit 1849. Diplomarbeit. Universität Wien 1999.
SCHERMAIER, J.: Geschichte und Gegenwart des allgemeinbildenden Schulwesens in Österreich unter besonderer Berücksichtigung der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS), Wien 1990.
VADEMECUM für Candidaten des Mittelschullehramtes in Österreich, 3. Theil: Für Mathematiker, Physiker und Naturhistoriker an Gymnasien. Wien 1895.
WALLENTIN, F.: Die schriftliche Maturitätsprüfung aus der Mathematik. In: Zeitschrift für das Realschulwesen, 3. Jg., Wien 1878, S. 193-209.

Gesetze, Verordnungen und Erlässe (chronologisch geordnet):

ME vom 28.8.1848, Z. 5602., ME vom 22. 7. 1849, Z.333., MV vom 30. 8. 1849, Z.5880., ME vom 16.9.1849, Z. 6467., MS vom 3.6.1850, Z. 4638., MS vom 26.5.1851, Z. 5123., ME vom 1.2.1852, Z. 1373., ME vom 10.7.1853, Z. 6661., ME vom 15.12.1854, Z. 18748., MV vom 9.12.1854, Z. 1432., ME vom 23.3.1855, Z. 3650., MV vom 10.9.1855, Z. 10312., ME vom 30.3.1856, Z. 4921., MV vom 24.7.1856, Z.6124., ME vom 26.7.1856, Z. 11619, ME vom 4.5.1865, Z. 3325., ME vom 27.3.1869, Z.11387., ME vom 10.3.1870, Z. 12024., ME vom 21.12.1870, Z. 11788., ME vom 18.6.1878, Z. 9645., ME vom 22.1.1879, Z. 803., MV vom 26.5.1884, Z. 10128., MV vom 28.4.1885, Z. 7553., ME vom 5.5.1895, Z. 9826., ME vom 23.2.1900, Z.5146., MV vom 29.2.1908, Z.10051., MV vom 20.3.1909, Z.11662., E. vom 3.5. 1919, Z.8897

Verwendete Reifeprüfungsaufgaben (aus den Jahresberichten der einzelnen Anstalten):

k.k. Akademisches Gymnasium in Wien (Sommertermin 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907; Herbsttermin 1907)

k.k Ober-Gymnasium zu den Schotten in Wien (Sommertermin 1876, 1877, 1878, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907)
k.k. Real-Obergymnasium auf der Landstraße in Wien bzw. k.k. Staatsgymnasium im III. Bezirk in Wien (Sommertermin 1874, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907; Herbsttermin 1876, 1879, 1883, 1895, 1900; Ostertermin 1880, 1884)
k.k. Josefstädter Ober-Gymnasium bzw. k.k. Staatsgymnasium im VIII. Bezirke Wiens (Sommertermin 1876, 1877, 1879, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903; Herbsttermin 1896; Ostertermin 1876)
k.k. Staatsgymnasium im IX. Bezirke in Wien bzw. k.k. Maximilian-Gymnasium in Wien (Sommertermin 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1885, 1886, 1887, 1888, 1891, 1892, 1893, 1894, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907; Herbsttermin 1876, 1878, 1879; Ostertermin 1879)
k.k. Staats-Gymnasium im XII. Bezirke in Wien (Unter-Meidling) (Sommertermin 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907; Herbsttermin 1897, 1905)
k.k. Staats-Gymnasium im XIII. Bezirke in Wien (Fichtnergasse 15) (Sommertermin 1904, 1905, 1907)
Communal-Ober-Gymnasium im XIX. Bezirke Wiens bzw. k.k. Staatsgymnasium im XIX. Bezirke von Wien (Sommertermin 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907)

Anhang:

Aufgabenstellungen bei schriftlichen Maturitätsprüfungen aus Mathematik - Beispiele aus den Jahren 1874 bis 1907

5. Mathematische Arbeit, am 12. Juni: 1. Man bestimme x, y, z aus den drei Gleichungen

$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z = 27,$$
$$x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 20,$$
$$x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}z = 16.$$

2. Ein Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie c, der Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises und der der Grundlinie anliegende Winkel α gegeben sind. 3. In dem Dreiecke ABC ist die Seite $a = 2825'$, die Seite $b = 2225'$ und der Winkel $C = 18^\circ\, 21'\, 40''$; man berechne die Winkel A und B, die Seite c und den Flächeninhalt f dieses Dreiecks. 4. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = 144$ und die Gerade $y = 3\tfrac{1}{2}x + 4$; man bestimme die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit 3 Decimalstellen.

Abb. 11 (Wien 3, 1874)

Mathematik: 1. Vier Zahlen stehen in geometrischer Progression. Die Summe der 1. und 4. verhält sich zur Summe der 2. und 3. wie $3:2$; die 2. Zahl ist um 72 kleiner als die 4. Wie heissen diese 4 Zahlen? — 2. Eine hohle Metallkugel von 4 dm. Durchmesser soll nahezu — aber nicht weniger — als 25 Kilogr. wiegen. Wie dick muss die Metallhülle genommen werden, wenn das specif. Gew. des Metalles = 8·45? — 3. Wie lang ist die kürzeste und die längste Seite eines rechtwinkl. dreieckigen Grundstückes, dessen Flächeninhalt 138 Ar beträgt, wenn ein Winkel in derselben $= 27^\circ\, 53'$. — 4. Gleichung der Geraden zu entwickeln, welche durch den Punkt M, $(x_1 = -2, y_1 = -2)$ geht und senkrecht steht auf der Geraden $y = \frac{x}{2} - 1$. Nachweis der Richtigkeit durch Construction.

Abb. 12 (Wien 8, 1876)

Aus der Mathematik:

1. Drei Gemeinden übernehmen gemeinschaftlich die Ausbesserung einer Strasse. Die Gemeinde A stellte dazu 50 Mann und 50 Pferde auf 3 Tage; B 36 Mann und 20 Pferde auf $12\frac{1}{2}$ Tage; C 24 Mann und 36 Pferde auf 25 Tage. Die vom Staate für diese Arbeit bewilligte Vergütung betrug 2380 fl. Wenn nun 1 Pferd gleich 3 Mann gerechnet wird, wie viel kommt von dieser Summe auf jede Gemeinde?

2. Zwei Kaufleute verkaufen von einer Tuchwaare eine bestimmte Anzahl Meter; der eine drei Meter weniger als der andere und lösen zusammen 35 fl. Hätte jeder dieselbe Quantität aber zu dem Preise des andern verkauft, so würde der erste $12\frac{1}{2}$ fl., der zweite 24 fl. gelöst haben. Wie viel Meter hat jeder verkauft?

3. Welche Leibrente kann man für ein Capital von 6600 fl. erhalten, wenn die wahrscheinliche Lebensdauer zu 18 Jahren und der Zinsfuss zu $4\frac{1}{2}\%$ angenommen wird?

4. In einem schiefwinkligen Dreiecke sind die drei Seiten gegeben: $a = 114^m$; $b = 164^m$; $c = 178^m$.

Zu bestimmen die drei Winkel und der Flächeninhalt des Dreieckes.

Abb. 13 (Schottengymn., 1876)

5. Die Diagonalen eines Rhombus sind:

$a = 12345 \qquad b = 67890$

Wie gross ist der Flächeninhalt des dem Rhombus eingeschriebenen Kreises?

Vermehrt man die Zahl der Glieder einer arithmetischen Progression (dieselbe ist grösser als 3) um das 75fache ihres reciproken Werthes, so erhält man 28. Die Summe des ersten Gliedes, des letzten Gliedes, der constanten Differenz und der Summe aller Glieder ist 677. Die doppelte Summe aller Glieder, das erste Glied, die Hälfte der constanten Differenz und der 49. Theil des letzten Gliedes betragen zusammen 1253. Wie lautet die Progression?

$$\sqrt[x]{10} \cdot \sqrt[x+1]{100} = 10000.$$

Wie verhält sich der Inhalt eines gleichseitigen Kegels zum Inhalte des dem Kegel eingeschriebenen Würfels?

Abb. 14 (Wien 9, 1878)

5. **Aus Mathematik:**

a) Vermehrt man in einer arithmetischen Progression von 3 Gliedern das erste Glied um 8, so wird daraus eine geom. Progression; die Summe der Glieder der geom. Progression ist = 26; wie heissen die Progressionen?

b) Wenn α eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$; wie heissen die beiden anderen Wurzeln? Hierzu ein Beispiel sammt Probe.

c) Ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Winkel an der Grundlinie (β) und der Summe der beiden Höhen (s) zu berechnen.
Beispiel: $\beta = 67^0\ 30'$, $s = 2$. Construction des Dreieckes facultativ.

d) In eine regelmässige vierseitige Pyramide, deren jede Kante = a ist, soll eine Kugel eingeschrieben werden. Wie gross ist der Halbmesser derselben?

Abb. 15 (AkG Wien 1878)

4. Mathematische Arbeit, am 6. Juni: α) Welche Zahl unter 2000 geht durch 11 auf und lässt, durch 12 und 13 getheilt, bezüglich die Reste 7 und 6? — β) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Katheten s, der Flächeninhalt f, die drei Seiten und einen spitzen Winkel zu berechnen. $s = 17^m$, $f = 30^m$. — γ) Der Axenschnitt eines senkrechten Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck von der Höhe h; die Oberfläche und den Kubikinhalt des Kegels zu berechnen. $h = 6{\cdot}2^m$. — δ) Die Coordinaten der Eckpunkte eines Viereckes sind: $A: +1, +1$; $B: +5, +2$; $C: +4, +5$; $D: +2, +4$; die Coordinaten des Durchschnittpunktes der Diagonalen und den Winkel, unter welchem sie sich schneiden, zu berechnen.

Abb. 16 (Wien 3, 1878)

Aus der Mathematik:

1. Auf ein zu 5% Zinzeszins stehendes Capital von 30.000 fl. werden jährlich 3500 fl. abgetragen, in wie viel Jahren wird dadurch das Capital getilgt sein.

2. Die Summe der Oberflächen zweier Würfel beträgt $61{\cdot}5\square^{dm.}$ und die Summe zweier Kanten derselben ist $4{\cdot}5^{dm.}$, wie gross ist der Kubikinhalt eines jeden Würfels?

3. Der Halbmesser eines Kreises ist $12{\cdot}5^m$ lang, ein Centriwinkel $= 42^0\ 13'$; es ist die Fläche des Kreisabschnittes zu berechnen.

4. Ein Feld von 864 Ar soll unter drei Gemeinden *a, b, c* so vertheilt werden, dass sich der Antheil der Gemeinde *a* zum Antheile der Gemeinde *b* wie 5 : 11 verhalte und dass *c* so viel bekomme, als die beiden Gemeinden *a* und *b* zusammen.

Abb. 17 (Schottengymn., 1878)

Aus der Mathematik: I. $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 2$

$$xy - (x+y) = 54.$$

II. Es werden durch $n = 15$ Jahre am Anfange jedes Jahres $a = 150$ fl. auf Zinseszinsen in der Weise angelegt, dass $5^3/_4\%$ gerechnet werden und die Zinsen halbjährig zum Capital geschlagen werden. Wie groß ist der Gesammtwert S dieser Einlagen am Ende des 15. Jahres?

III. Es soll der Cubikinhalt eines geraden Kegelstumpfes aus der Seite $S = 2{\cdot}4$ m, ihren Neigungswinkel $\sphericalangle\ \alpha = 68^0\ 34'\ 25''$ gegen die größere Grundfläche und der Mantelfläche $M = 8{\cdot}46\text{m}^2$ berechnet werden.

IV. In den Durchschnittspunkten des Kreises:

$$x^2 + y^2 = 16$$

und der Ellipse: $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ sollen an jede Curve Tangenten errichtet und der Winkel, den diese Tangenten mit einander einschließen, berechnet werden. Auch sind die beiden Kegelschnittslinien, sowie die Tangenten in den Durchschnittspunkten zu zeichnen.

Abb. 18 (Wien 8, 1886)

Mathematik: 1. Von fünf Zahlen bilden die vier ersten eine arithmetische Reihe, deren Summe 30 ist, und die drei letzten eine geometrische Reihe, in welcher das Product der zwei äußeren Glieder 24mal so groß ist als die zweite der fünf Zahlen. Wie heißen die fünf Zahlen?

2. Aus der Gleichung: $m \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} = n \frac{1 + \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}$ ist φ allgemein und für den speciellen Fall $m = 2$, $n = 3$ zu bestimmen.

3. Eine leuchtende Kugel hat den Radius $R = 3m$, eine von dieser beleuchtete Kugel besitzt den Radius $r = 1{\cdot}8m$; der Centralabstand der beiden Kugeln ist $5m$. Wie groß ist die im Kernschatten, wie groß die im Halbschatten befindliche Fläche der beleuchteten Kugel?

4. Vom Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystemes wird ein Strahl gezeichnet; auf denselben wird von einem in der Abscissenachse gegebenen Punkte A, dessen Abstand vom Coordinatenanfangspunkte a ist, ein Perpendikel AB auf den Strahl gezeichnet und dasselbe bis C verlängert, so dass $AB : BC = m : n$ ist. Führt man die Construction für verschieden gerichtete Strahlen aus, so ändert der Punkt C seine Lage. Es ist der geometrische Ort aller dieser Punkte C zu suchen.

Abb. 19 (Wien 9, 1888)

b) Mathematik, 8. Mai:

1. $$\begin{cases} \sqrt{5 + 3(x + \sqrt{y})} + \sqrt{8 + 4(x + \sqrt{y})} = \\ = \sqrt{4 + 8(x + \sqrt{y})} + \sqrt{9 - (x + \sqrt{y})} \\ (2x + 3\sqrt{y})^2 = 3{\cdot}1\,(2x + 3\sqrt{y}) - 1{\cdot}5. \end{cases}$$

2. Jemand will durch 10 Jahre am Anfange eines jeden Jahres 240 fl. einzahlen, um sich für die nachfolgenden 8 Jahre den Bezug einer am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente zu sichern. Wie groß ist diese, wenn die Zinsen und Zinseszinsen mit $4^1/_2\%$ berechnet werden?

3. Die Seite eines geraden Kegels, dessen Inhalt 79 dm^3 beträgt, verhält sich zum Basisradius wie 5 : 4. Wie groß ist die Oberfläche eines diesem Kegel ähnlichen Kegels, wenn der Basisradius des letzteren um 1 dm 8 cm kleiner ist, als der des ersteren?

4. Der Mittelpunkt des Kreises: $x^2 + y^2 + 18y = 14x - 121$ wird mit den zwei Brennpunkten der Ellipse: $4x^2 + 5y^2 = 320$ durch gerade Linien verbunden. Welchen Winkel schließen diese mit einander ein?

Abb. 20 (Wien 3, 1888)

Mathematik:

1. Einer Kugel ist ein gleichseitiger Kegel ein- und umgeschrieben. Wenn die Oberflächendifferenz der beiden Kegel $\delta = 339 \cdot 12\ cm^2$ ist, wie groß sind Oberfläche und Volumen der Kugel?

2. Der Bruch $\frac{659}{315}$ soll in drei Brüche mit den Nennern 5, 7, 9 zerlegt werden, so dass die Summe der Zähler um 6 kleiner ist als die Summe der Nenner. Welches sind die gesuchten Brüche?

3. Wie verhalten sich die Entfernungen der Brennpunkte der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ von der durch einen Endpunkt des Parameters gehenden Tangente?

4. Aus einem mit $40\ l$ Weingeist gefüllten Fässchen nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Entnommene durch Wasser. Hierauf nehme ich von der Mischung eine gleiche Menge heraus wie beim erstenmale und noch $7\ l$ dazu und fülle das Fässchen wieder mit Wasser voll. Nun enthält die Mischung ebensoviel Wasser als Weingeist. Wieviel Liter wurden das erstemal entnommen?

Abb. 21 (Wien 9, 1892)

5. Mathematische Arbeit: 1. Zu Beginn des Jahres 1870 wurde ein Capital von 50.000 fl. zu 4 % auf Zinseszinsen angelegt mit halbjähriger Capitalisirung der Zinsen. Sobald das Capital die Summe von 150.000 fl. überschritten hat, sollen von dem nächsten Halbjahre angefangen die halbjährigen Zinsen jedesmal unter 50 Arme gleichmäßig vertheilt werden. Wann erfolgt die erste Vertheilung, und wieviel erhält jeder Arme? 2. Wie groß ist die gemeinsame Fläche zweier Kreise mit den Radien $a = 5$, $b = 6$ und dem Centralabstand $c = 7$? 3. Einer Kugel wird eine regelmäßige vierseitige Pyramide umgeschrieben, deren Höhe durch den Mittelpunkt der Kugel im Verhältnisse $3:1$ getheilt wird. Es ist der Neigungswinkel zweier Seitenflächen zu berechnen. 4. Die in einem Punkt M_1 einer Parabel construierte Normale schneidet dieselbe zum zweitenmale in M_2. Der Punkt M_2 wird mit dem Scheitel A durch eine Gerade verbunden, und zu dieser in A die Normale AL construiert. Es ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Geraden AL mit der in M_1 gelegten Tangente zu suchen, wenn M_1 seinen Ort ändert.

Abb. 22 (AkG Wien, 1895)

c) Mathematische Arbeit, 10. Juni.

1. $6a^2x^4 - (2a^3 + 3a)x^3 + (7a^2 - 45)x^2 - (2a^3 + 3a)$ $x + 6a^2 = 0$; $x = ?$
2. Jemand verpflichtet sich, eine jetzt fällige Schuld von 1877 fl. dadurch abzutragen, dass er am Ende eines jeden Jahres 200 fl. zahlt. Nach wie viel Jahren wird die Schuld abgetragen sein, wenn vierpercentige Zinseszinsen gerechnet werden?
3. Vom Punkte $(1, -2)$ werden an die Ellipse $x^2 + 5y^2 = 5$ zwei Tangenten gezogen und jeder der zwei Berührungspunkte mit dem auf derselben Seite der Ordinatenachse liegenden Brennpunkt verbunden. Wo schneiden sich die zwei Verbindungslinien?
4. Der Centriwinkel des Achsenschnittes eines Kugelsectors beträgt $123^0\ 51'\ 20''$ und der konische Theil seiner Oberfläche $13 \cdot 5387\ m^2$. Wie groß ist das Volumen und die Gesammtoberfläche dieses Körpers?

Abb. 23 (Wien 3, 1895)

Themen aus der Mathematik: 1. Ein Bote wird von dem Orte A aus gegen B abgeschickt und legt am ersten Tage 60 *km* zurück, am zweiten 55 *km*, am dritten 50 *km* u. s. w. — Drei Tage später wird ihm von A aus ein zweiter Bote nachgeschickt, der am ersten Tage 40 *km*, am zweiten 48 *km*, am dritten 56 *km* u. s. w. zurücklegt. Wann und in welcher Entfernung von A wird der zweite Bote den ersten einholen?

2. Jemand hat 25 Jahre eine Rente von 800 fl. zu genießen, wie lange muss er ihrem Genusse entsagen, um dann 15 Jahre hindurch eine Rente von 1615 fl. haben zu können, wenn die Zinseszinsen mit $3\frac{1}{2}\%$ berechnet werden?

3. Man berechne den Cubikinhalt jenes geraden Cylinders, der einem dreiseitigen Prisma umgeschrieben ist, wenn der Cubikinhalt V des Prismas und von seiner Grundfläche die Winkel gegeben sind. $V = 2{\cdot}357852\ m^3$; $\sphericalangle\, \alpha = 68^0\ 13'\ 24''$; $\sphericalangle\, \beta = 82^0\ 11'\ 32''$.

4. In dem Punkte $x_1 = 32$ der Curve $y^2 = 8x$ soll im ersten Quadranten eine Tangente gezogen und auf dieselbe vom Brennpunkte eine Senkrechte gefällt werden; man suche die Fläche des Dreieckes, welches von dieser Normalen, der Tangente und dem Radiusvector des Berührungspunktes begrenzt ist.

Abb. 24 (Wien 8, 1898)

e) Mathematik:

1. Auf zwei sich unter einem Winkel von 60⁰ schneidenden Geraden liegen die Punkte A und B, deren gegenseitige Entfernung 31 *m* beträgt. Schiebt man den Punkt A um 20 *m* weiter nach dem Schnittpunkte hin, so beträgt die Entfernung A B nur noch 21 *m*. Wie weit sind A und B vom Schnittpunkte entfernt?
2. Auf einem Gute lastet die Verpflichtung, 150 *K* jährlich postnumerando zu bezahlen. Ein Käufer des Gutes will die Verpflichtung ablösen, und zwar so, dass er bar 1000 *K* und am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Rente 10 Jahre lang bezahlt. Wie groß wird die Rente sein, wenn $4^0/_0$ gerechnet werden?
3. Welchen Winkel bilden die Seitenlinien eines geraden abgestumpften Kegels mit der größeren Grundfläche, wenn die Maßzahl des Volumens $V = 347{\cdot}162$ ist und die Umfänge der Grundflächen die Maßzahlen $U_1 = 50$ und $U_2 = 30$ haben?
4. Von dem Punkte $x_1 = 19$, $y_1 = 22$ werden an den Kreis $x^2 + y^2 = 169$ Tangenten gelegt; man bestimme die Gleichung der Berührungssehne und berechne die Maßzahl der von der Kreislinie und den Tangenten eingeschlossenen Fläche.

Abb. 25 (Wien 19, 1898)

5. Mathematische Arbeit:

a) Berechne den Winkel α aus der Gleichung:

$$16^{1-\cos\alpha} = 3 \cdot 16^{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2.$$

b) Die Ziffern einer dreizifferigen Zahl bilden eine arithmetische Reihe; die Summe der Quadrate der drei Ziffern ist 93; dividiert man die Zahl durch ihre Ziffernsumme, so erhält man den Quotienten 17 und den Rest 3. Wie groß ist die Zahl?

c) Ein gerader Pyramidenstumpf mit quadratischen Grundflächen ist so beschaffen, dass sich darin eine alle Flächen berührende Kugel mit dem Halbmesser r einschreiben lässt; wenn nun die Diagonale der größeren Grundfläche des Stumpfes dem doppelten Durchmesser der Kugel gleich ist, wie groß ist die Oberfläche und das Volumen des Stumpfes, ausgedrückt durch r?

d) Eine Ellipse und eine Hyperbel sind confocal, die Nebenachse der Hyperbel ist der kleinen Achse der Ellipse gleich; unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Curven?

Abb. 26 (Wien 9, 1901)

e) Mathematik:

1. Eine Jahresrente von 2000 *K*, welche noch durch 20 Jahre bezogen werden kann, soll in eine andere verwandelt werden, welche 12 Jahre läuft, aber am Ende eines jeden halben Jahres ausbezahlt wird; wie groß ist diese bei $3 \cdot 4\%$ Zinseszins?
2. Der Mantel einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide mit der Grundkante a ist doppelt so groß als die Grundfläche: Zu berechnen: *a)* den Neigungswinkel einer Seitenkante und jenen einer Seitenfläche gegen die Grundfläche; *b)* die Oberfläche und das Volumen der Pyramide; *c)* die Oberfläche des umgeschriebenen Kegels; *d)* den Radius der diesem Kegel eingeschriebenen Kugel.
3. Von einem gleichschenkeligen Dreieck (Grundlinie a, Schenkel b) ist $\varrho_a + \varrho = s$ und β gegeben. Das Dreieck aufzulösen und ϱ_b zu berechnen.
4. Welches Segment schneidet die Gerade $y = \frac{4x}{5} + \frac{24}{5}$ von der Parabel $y^2 = 16x$ ab? Wie heißt die Gleichung der Tangente dieser Parabel, welche mit jener Geraden parallel ist? Wie groß sind die zugehörigen Berührungsgrößen?

Abb. 27 (Wien 3, 1902)

Themen aus der Mathematik:

1. $(x+y)\sqrt{x+y} = 1.$ $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 125.$

2. Jemand zahlt vom Beginn seines 30. bis zum Beginn seines 49. Lebensjahres zu Anfang jedes Jahres eine gewisse Summe in eine Rentenanstalt, um sich eine durch 12 auf einander folgende Jahre fällige Rente von 800 *K* zu sichern. Wie groß ist die jährlich einzuzahlende Summe, wenn der erste Rentenbezug mit Ende des 50. Lebensjahres stattfindet, und wenn die Anstalt vereinnahmte Gelder mit 3%, verausgabte mit 5% rechnet?

3. Die Grundkante einer regelmäßig vierseitigen Pyramide ist $a = 1{\cdot}6987\ dm$; der Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenkanten $\alpha = 35^0\,25'\,4''$; wie groß sind Oberfläche und Volumen der Pyramide?

4. Es sind die Gleichungen der zweien congruenten und concentrischen Ellipsen gemeinschaftlichen Tangenten aufzustellen, wenn die Hauptachsen der Ellipsen sich rechtwinkelig schneiden. In welchem Abstande vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte treffen die Tangenten die Achsen?

Abb. 28 (Wien 8, 1901)

5. Mathematische Arbeit: 1. Jemand legt einen gewissen Betrag zu $5^0/_0$ auf Zinseszins an und legt am Ende jedes Jahres $10^0/_0$ des ursprünglichen Betrages dazu. Wie lange muß er dies tun, damit sich das ursprüngliche Kapital verdopple? 2. Von einem Punkte, dessen Zentralabstand von der Kugel mit dem Radius r gleich c ist, werden an diese Tangenten gelegt. Wie groß ist die Oberfläche und das Volumen jenes Kegels, dessen Spitze der gegebene Punkt und dessen Seiten die Tangenten sind? $(r = 4,\ c = 10)$. 3. Es ist ein Dreieck aufzulösen, wenn $h_1 = 54{\cdot}82$, $w_1 = 59{\cdot}69$, $\alpha = 79^0\,36'\,40''$ gegeben ist. 4. Wie lauten die Gleichungen der beiden Kurven $y^2 = 2px$ und $(x + \frac{p}{2})^2 + y^2 = \frac{p^2}{4}$ gemeinsamen Tangenten?

Abb. 29 (AkG Wien, 1903)

I. Mathematik:

1. Die Ziffern einer dreiziffrigen Zahl bilden eine arithmetische Reihe, ihre Summe ist 9; das Produkt aus der Einerziffer und der Summe der beiden anderen ist 20; wie heißt die Zahl?
2. Bei einem um die Kugel vom Halbmesser r beschriebenen geraden Kegelstumpfe ist die Oberfläche n mal so groß als die Kugelfläche. Wie groß sind die Halbmesser der Grundkreise? Speziell $n = \frac{133}{72}$.
3. Es ist das Dreieck aufzulösen, wenn $a = 25$, ρ (eingeschriebener Kreis) $= 9$, $b - c = 11$ gegeben ist.
4. Wie lautet die Gleichung einer Ellipse, welche die Parabel ($y^2 = 2x$) rechtwinkelig schneidet, wenn ihr Mittelpunkt im Scheitel der Parabel liegt und die in die Richtung der Parabelachse fallende große Halbachse gleich dem Parameter der Parabel ist.

Abb. 30 (Wien 19, 1904)

e) Mathematik:

1. Wenn das erste Glied einer arithmethischen Progression das geometrische Mittel zweier Zahlen und gleich 6 ist, das zweite Glied das arithmetische Mittel, das letzte und 29. Glied das Zehnfache des harmonischen Mittels jener zwei Zahlen ist, wie groß ist die Summe aller Glieder der positiven Progression, wenn zwischen je zwei Glieder derselben ein neues Glied eingeschaltet wird?
2. Gegeben: $a = 6$, $h_a = 3$, $m_c = 4$; das Dreieck ist trigonometrisch und konstruktiv zu bestimmen. (Die Seite c und der Winkel β im besonderen!)
3. Die Grundkante einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide sei $a = 24{\cdot}8\,cm$, der von zwei Seitenkanten gebildete Winkel sei $\delta = 32^\circ 14'$. Ein mit der Grundfläche paralleler Schnitt soll die Pyramide in zwei Teile teilen, so daß sich die kleine Pyramide zum Stutz wie $3:7$ verhält; wie groß ist der Inhalt des Stutzes?
4. Gegeben: $x^2 + y^2 = 9$ und von einer Ellipse $b = 3$ und $e = \sqrt{7}$. Um welche kleinste Strecke muß die Gerade $y = -5x + 20$ parallel zu zu sich bewegt werden, damit sie Tangente der Ellipse, und um welche Strecke, damit sie Tangente des Kreises werde?

Abb. 31 (Wien 3, 1905)

5. Mathematik: 1. Die Maßzahlen der drei Seiten eines Dreiecks bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz d. Das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks zu dem Flächeninhalte des aus den beiden kleinsten Seiten gebildeten Rechtecks ist m. *a)* Wie groß ist die kleinste Seite? *b)* Welche Lösung erhält man für den größten Wert, welche m annehmen kann? — 2. Von einem Dreiecke sind gegeben die Winkel $\alpha = 56^\circ 8' 40''$ und $\beta = 106^\circ 15' 36''$ sowie die kleinste Entfernung des Eckpunktes A von dem Umfange des eingeschriebenen Kreises $d = 9\,m$. Wie groß ist die kleinste Entfernung des Eckpunktes B von demselben Kreise? — 3. Einer Kugel mit dem Radius r ist ein gerader Zylinder einzuschreiben, so daß die beiden über den Grundflächen des Zylinders befindlichen Kugelsegmente zusammen gleiches Volumen haben wie der Zylinder. Wie groß ist das Volumen dieses Zylinders? — 4. Von einem Punkte einer Hyperbel sind Parallele zu den Asymptoten gezogen. Es soll der konstante Flächeninhalt des Parallelogramms bestimmt werden, das von diesen vier Geraden gebildet wird.

Abb. 32 (AkG Wien, 1906)